

**НАЦІОНАЛЬНИЙ ТЕХНІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ УКРАЇНИ  
КИЇВСЬКИЙ ПОЛІТЕХНІЧНИЙ ІНСТИТУТ ІМЕНІ ІГОРЯ СІКОРСЬКОГО**

*Факультет інформатики та обчислювальної техніки*

(назва факультету, інституту)

*Кафедра автоматизованих систем обробки інформації і управління*

(назва кафедри)

"На правах рукопису"

УДК 621.391

«До захисту допущено»

Завідувач кафедри

О.А.Павлов

(підпис)

(ініціали, прізвище)

“ ” 20 18 р.

**МАГІСТЕРСЬКА ДИСЕРТАЦІЯ**

**на здобуття ступеня магістра**

за спеціальністю 122 Комп'ютерні науки та інформаційні технології

(код та назва спеціальності)

спеціалізацією Інформаційні управляючі системи та технології

(код та назва спеціалізації)

на тему: «Побудова локальної мапи рельєфу для задач керування автономним наземним транспортним засобом»

Виконав студент

VI курсу групи ІС-63м

(шифр групи)

Литвин Андрій Васильович

(прізвище, ім'я, по батькові)

(підпис)

Науковий керівник

проф., д.ф.м.н. проф. Ляшко С.І.

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Консультант

к.т.н., доц. Жданова О.Г.

(науковий ступінь, вчене звання, прізвище, ініціали)

(підпис)

Рецензент

(посада, науковий ступінь, вчене звання, прізвище та ініціали)

(підпис)

Засвідчую, що у цій магістерській дисертації  
немає запозичень з праць інших авторів без  
відповідних посилань.

Студент

(підпис)

Київ – 2018

## РЕФЕРАТ

**Актуальність.** Із розвитком інформаційних технологій та штучного інтелекту прийшло широке застосування роботів у різних сферах діяльності людини: починаючи з роботів на виробництві і закінчуючи роботами, що досліджують інші планети. Оскільки зі стрімким розвитком штучного інтелекту, такі роботи набувають все більше популярності, оскільки можуть рятувати людські життя і виконувати речі, що людині поки що не під силу. До прикладу, роботи, що розмінують мінні поля. Або загальновідомий робот-ровер «Curiosity», що займається дослідженням Марсу та є частиною програми NASA Марсіанська наукова лабораторія. Такі роботи здатні самі приймати рішення, куди рухатись і що робити, завдяки штучному інтелекту. Але трапляються випадки, коли система виходить з ладу і керування роботом переходить до людини. В такому випадку, щоб знати, куди рухатися, потрібна локальна мапа рельєфу. Для побудови цієї карти можна використати виміряні дані висот місцевості за допомогою датчиків робота або використати наявні дані із місії SRTM. Shuttle Radar Topography Mission – це радарна топографічна зйомка більшої частини земної кулі, що відбулася в 2000 році. Ці дані є у відкритому доступі і являються собою бінарні файли із даними висот. Ці дані чудово підійдуть для вирішення задач просторової інтерполяції для побудови локальної мапи рельєфу. Також, важливою задачею є оцінка точності побудованої карти рельєфу. У зв'язку з цим, дослідження та удосконалення методів побудови карти рельєфу та методів інтерполяції є актуальними, що дозволить зменшити затрати на обчислювальні ресурси при виробленні та використанні роботів або наземних транспортних засобів.

**Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами.** Робота виконана на філії кафедри автоматизованих систем обробки інформації та управління в Інституті кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України в рамках науково-дослідної теми «Розробка алгоритмів моделювання та оптимізації динамічних систем для оборони, медицини та екології» (шифр теми: 16БФ015-03).

**Мета дослідження** – покращення алгоритму побудови просторової інтерполяції методом зворотних зважених відстаней шляхом модифікації та оптимізації.

Для досягнення мети необхідно виконати наступні **завдання**:

- провести модифікацію існуючого алгоритму;
- запропонувати критерії задовільності мапи;
- визначити критерії інтерполяції (повна похибка інтерполяції);
- порівняти різні алгоритми побудови мапи та

інтерполяції.

**Об'єкт дослідження** – процес побудови локальної мапи рельєфу.

**Предмет дослідження** – алгоритми побудови мапи та інтерполяції.

**Методи дослідження**, застосовані у даній роботі, базуються на алгоритмах інтерполяція на основі підходу локального сусідства.

**Наукова новизна одержаних результатів** полягає у оптимізації існуючого алгоритму зворотних зважених відстаней для побудови локальної карти рельєфу, найбільш близької до реальної. А також оцінка якості інтерполяції карти рельєфу для конкретних умов задачі.

ПРОСТОРОВА ІНТЕРПОЛЯЦІЯ, КРИГІНГ, SRTM, МЕТОД ЗВОРОТНИХ  
ЗВАЖЕНИХ ВІДСТАНЕЙ, ПРОСТОРОВА МОДЕЛЬ

## ABSTRACT

**Relevance.** With the development of information technology and artificial intelligence, there has been widespread use of robots in various fields of human activity, ranging from robots in factories and ending with works that are exploring other planets. Because of the rapid development of artificial intelligence, such works are gaining in popularity, because they can save lives and do things that people can not do. For example, minefields robots. Or the well-known "Curiosity" robotic research worker for Mars that is a part of NASA's Martian Scientific Laboratory. Such works are capable of making decisions about where to go and what to do, thanks to artificial intelligence. But there are cases when the system fails and robot control goes to the person. In this case, to know where to move, you need a local relief map. To construct this map, you can use the measured elevation data using robot sensors or use existing data from the SRTM mission. Shuttle Radar Topography Mission is a radar topographic research of most of the globe in 2000 year. This data are publicly accessible and are binary files with elevation data and are perfectly suited for solving spatial interpolation problems for building a local relief map. Also, an important task is to evaluate the accuracy of the map of the relief. In this regard, research and improvement of the methods of constructing relief maps and interpolation methods are relevant, which will reduce the cost of computing resources in the development and use of robots or land vehicles.

**Connection with academic papers, plans, themes.** The work was done at the branch of the department of automated data processing systems and management at the V.M. Glushkov Institute of Cybernetics NAS of Ukraine within the research topic "Development of algorithms for modeling and optimizing dynamic systems for defense, medicine and ecology" (topic code: 16БФ015-03).

**Purpose of study** – improvement of the algorithm for constructing spatial interpolation by the method of inverse distance weighting. To achieve the purpose, the following **tasks** must be accomplished::

- modify the existing algorithm;
- propose the criteria for map suitability;
- define interpolation criteria (complete interpolation error);

- compare different algorithms for building a map and interpolation.

**Object of study** – process of building a local relief map.

**Subject of study** – algorithms for mapping and interpolation.

**The scientific novelty of the obtained results** is to optimize the existing algorithm of inverse distance weighting for constructing a local relief map that is closest to the real one. And also an quality estimation for interpolated relief map.

SPATIAL INTERPOLATION, Kriging, SRTM, INVERSE DISTANCE WEIGHTING, SPATIAL MODEL

## ЗМІСТ

Вступ	10
1 Огляд задачі побудови локальної мапи рельєфу	12
1.1 Методи зображення рельєфу місцевості	12
1.1.1 Перспективний метод	13
1.1.2 Штрихами	15
1.1.3 Відмивка рельєфу	16
1.1.4 Метод горизонталей	17
1.2 Інтерполяція даних	24
1.2.1 Лінійна інтерполяція	24
1.2.2 Сплайн інтерполяція	26
1.2.3 Багатовимірна інтерполяція	28
Висновок до розділу	34
2 Моделі та методи побудови локальної мапи рельєфу	35
2.1 Просторова інтерполяція	35
2.2 Детерміновані методи просторової інформації	36
2.2.1 Глобальні методи інтерполяції	36
2.2.2 Локально-детерміновані методи інтерполяції	38
2.3 Локально-стохастичні методи просторової інтерполяції і геостатистичне моделювання	42
2.3.1 Принципи геостатистичного моделювання	42
2.3.2 Побудова і оптимізація варіограмної моделі	45
2.3.3 Моделювання поверхонь та їх оцінка	49

2.3.4	Різновиди локально-стохастичної інтерполяції	52
2.4	Вибір методу інтерполяції	53
2.5	Загальний метод побудови рівнянь поверхонь	56
2.5.1	Загальні відомості	56
2.5.2	Побудова неявних рівнянь функцій	58
2.5.3	Побудова неявних рівнянь поверхні	61
2.5.4	Приклад	65
	Висновок до розділу	67
3	Модифікація алгоритму розв'язання задачі	68
3.1	Метод зворотних зважених відстаней	68
3.1.1	Оригінальний алгоритм	68
3.1.2	Модифікований алгоритм	69
3.1.3	Налаштування алгоритму	72
4	Опис програмного продукту	75
4.1	Засоби розробки	75
4.2	Вимоги до технічного забезпечення	76
4.3	Розробка програмного застосунку	77
4.4	Керівництво користувача	78
4.5	Результати досліджень	87
	Висновок до розділу	91
	Перелік посилань	93
	ДОДАТОК А ГРАФІЧНИЙ МАТЕРІАЛ	95
	ПЛАКАТ 1 Діаграма класів	96
	ПЛАКАТ 2 Діаграма розгортання	97
	ПЛАКАТ 3 Діаграма послідовності	98

ПЛАКАТ 4 Блок-схема роботи алгоритму	99
ПЛАКАТ 6 Графіки результатів досліджень	100
ПЛАКАТ 7 Екранні форми	101



## ВСТУП

Із розвитком інформаційних технологій та штучного інтелекту прийшло широке застосування роботів у різних сферах діяльності людини: починаючи з роботів на виробництві і закінчуючи роботами, що досліджують інші планети. Нас більше цікавлять останні – автономні роботи. Оскільки зі стрімким розвитком штучного інтелекту, такі роботи набувають все більше популярності, оскільки можуть рятувати людські життя і виконувати речі, що людині поки що не під силу. До прикладу, роботи, що розмінують мінні поля. Або загальновідомий робот-ровер «Curiosity», що займається дослідженням Марсу та є частиною програми NASA Марсіанська наукова лабораторія. Такі роботи здатні самі приймати рішення, куди рухатись і що робити, завдяки штучному інтелекту. Але, щоб знати куди рухатися та побудувати оптимальний маршрут, потрібно побудувати локальну карту рельєфу місцевості за допомогою датчиків, розміщених на роботі. Оскільки робота датчиків та обчислення даних, отриманих з них, - це ресурсозатратні операції, то потрібно дослідити оптимальну кількість замірів та їх алгоритм для того, щоб побудувати задовільну карту рельєфу місцевості. Також, важливою задачею є оцінка точності побудованої карти рельєфу(інтерполяція). У зв'язку з цим, дослідження та удосконалення методів побудови карти рельєфу та методів інтерполяції є актуальними, що дозволить зменшити затрати на вироблення та використання роботів або наземних транспортних засобів.

Метою даної роботи є покращення алгоритму побудови просторової інтерполяції методом зворотних зважених відстаней. Метод зворотних зважених відстаней(англійською *inverse distance weighting*) однозначно припускає, що об'єкти, які знаходять поруч, більш подібні один одному, ніж об'єкти, які віддалені один від одного.

Щоб проінтерполювати значення для невідомого положення, IDW використовує виміряні значення навколо місцяположення, що інтерполюється. Найближчі до проінтерпольованого місцязнаходження виміряні значення мають

найбільший вплив на прогнозоване значення, ніж віддалені від нього на значну відстань.

Метод зворотних зважених відстаней добре підходить для побудови мапи на локальному масштабі, але має певні недоліки для цієї задачі і потребує модифікацій. Модифікації в основному стосуються інтерполянта та внутрішньої реалізації алгоритму, зокрема структури даних, які використовуються в ньому.

За матеріалами дисертації було опубліковано дві наукові статті [28-29].

## **1 ОГЛЯД ЗАДАЧІ ПОБУДОВИ ЛОКАЛЬНОЇ МАПИ РЕЛЬЄФУ**

### **1.1 Методи зображення рельєфу місцевості**

Характер місцевості визначається формою, розмірами і розташуванням у просторі нерівностей земної поверхні, а також кількісним і якісним складом об'єктів, що розміщені на ній.

Сукупність нерівностей земної поверхні називається рельєфом місцевості, а вся решта розташованих на ній об'єктів як природного походження, так і створених людиною, – місцевими предметами. Всі ці об'єкти місцевості – рельєф і місцеві предмети прийнято називати топографічними елементами.

Як відомо, рельєф місцевості суттєво впливає на бойові дії військ. Не менш важливу роль він відіграє і під час вирішення господарських завдань. Тому на топографічних картах, крім місцевих предметів, зображуються також і нерівності земної поверхні, без чого неможливо всебічно вивчити характер місцевості і провести по карті необхідні розрахунки.

Зображення рельєфу на картах повинно не тільки передати загальний характер рельєфу і місцеположення його окремих форм, але і дати можливість визначити з достатньою точністю взаємне перевищення точок місцевості і крутизну схилів.

В результаті зйомки, а потім подальшого нівелювання отримують план місцевості з усіма подробицями ситуації та з рядом нанесених на план нівелірних точок, позначки яких вказують на висоту цих точок над рівнем моря (абсолютні позначки) або над умовним рівнем (умовні позначки).

За таких даних (позначок) можна:

- скласти профіль в заданому напрямку;
- визначити перевищення між окремими точками.

Але мати ясне, наочне уявлення про рельєф місцевості можливо тільки в тому випадку, якщо всі нерівності місцевості, які складають її рельєф, будуть зображені особливими умовними знаками, які виявляють цей рельєф з усіма його характерними особливостями.

Такими умовними знаками є горизонталі, штрихи і відмивка рельєфу.

### 1.1.1 Перспективний метод

Одним з перших способів зображення рельєфу, який широко використовувався у минулому, був **перспективний** (або картинний) спосіб, за якого гори, хребти і решта пагорбів відображалися у вигляді рисунків або перспективних знаків. Окремі гори відображалися ізольованими конусоподібними фігурами, що нагадують собою пагорби, а гірські хребти – групою (ланцюжком) таких фігур. Перспективний (картинний) спосіб зображення рельєфу широко застосовувався до середини XVIII століття, але він не дозволяв визначати по карті крутизну схилів і виражати всі характерні деталі рельєфу, особливо на рівнинній місцевості.

Картинний, перспективний рисунок рельєфу на старовинних картах був довільний. Значною мірою він ґрунтувався на уяві - адже картограф не піднімався над Землею. Приклад перспективного рисунку наведено на рисунку 1.1.

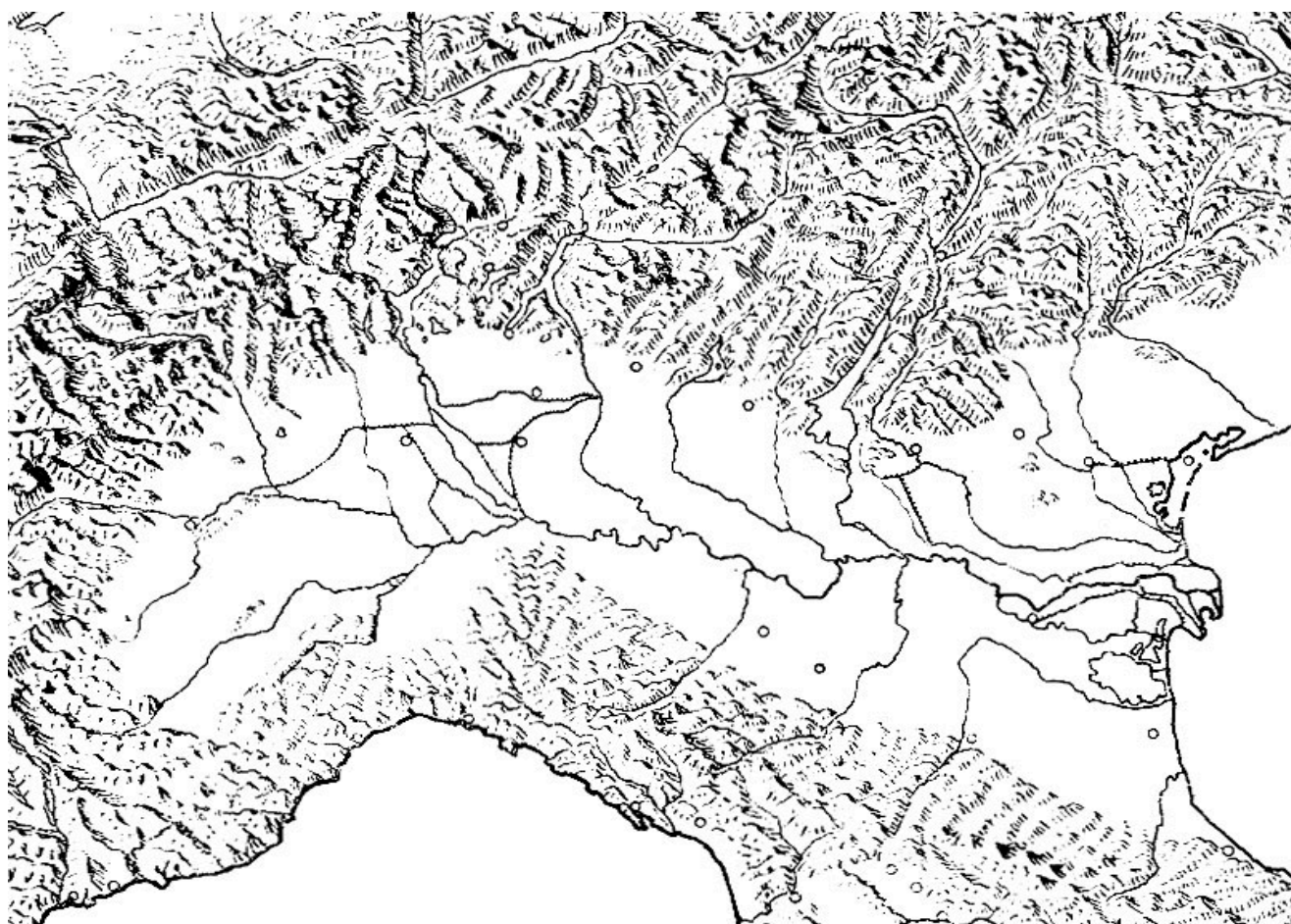


Рисунок 1.1 - Перспективне зображення рельєфу на сучасних картах

Таке зображення не забезпечувало правильної передачі форми земної поверхні і вносило спотворення в розташування об'єктів, що наносяться в планових обрисах. Як можна показати річкову мережу, селища, дороги на протилежному схилі хребта, прихованому від уявного спостерігача?

Однак в 20-м столітті перспективні зображення знову увійшли у вжиток, але вже на цілком об'єктивній основі. По-перше, стали застосовувати наочні перспективні знаки, що розробляються для основних типів рельєфу, що розміщуються в межах поширення цих типів, подібно до того як на топографічних картах викреслюють знаки боліт, солончаків і т. д., але з урахуванням дійсної орієнтації форм.

Тепер цей прийом застосовується на геоморфологічних картах, а також на картах ложа океанів. У спрощеному вигляді він популярний на картах-ілюстраціях в газетах, журналах і взагалі масових виданнях [1].

По-друге, отримали велике поширення перспективні зображення земного рельєфу і статистичних поверхонь, побудовані за певними геометричними принципами як похідні від традиційних карт. Вони позбавлені точності і значення цих карт, але дають в плоскому зображенні наочне уявлення про тривимірні поверхні. Графічним засобом служить перспективний малюнок горизонталей або профілів рельєфу; при розріджених перетинах цей малюнок доповнюють штрихуванням або відмивкою. Сполучення перспективних зображень земної поверхні з розрізами земної оболонки (атмосфери, земної кори, водних товщ океану) називають блок-діаграмами [2].

Для отримання перспективного зображення, дотримуючись правил нарисної геометрії, з центру проекції (очі спостерігача) проводять промені до характерних точок поверхні. При цьому повинно бути визначено положення центру проекції - його азимут, висота над горизонтом і віддаленість (або конус зору). Перетин променів з площиною проекції (картинної площиною) утворює каркас шуканого зображення [3].

Однак при ручній роботі заради спрощення побудови центр проекції відносять в нескінченність, тобто переходять до проектування паралельними променями.

### 1.1.2 Штрихами

Наприкінці XVIII на початку XIX століття під час складання карт став використовуватися спосіб зображення рельєфу штрихами, який прийшов на зміну перспективному способу. Сутність способу зображення рельєфу штрихами полягала в тому, що схили пагорбів показують на картах рисками (штрихами) різної товщини: чим крутіше схил, тим більше товщина штриха. Між товщиною штриха і крутизною схилу встановлювалася визначена залежність, завдяки чому на карті наочно вимальовувалися форми рельєфу, і можна було встановити характер схилів (крутий або похилий). На даний час, цей спосіб зображення рельєфу майже не використовується.

Штрихи, даючи наочне уявлення про рельєф місцевості, не дозволяють, все ж, вирішувати зазначені вище завдання. Схили місцевості при способі зображення рельєфу штрихами відтворюються з використанням штрихових елементів, спрямованих вниз по схилу і розташованих з рівним інтервалом. Вище і нижче по схилу штрихи обмежуються допоміжними лініями форми, які нагадують горизонталі, і окреслюють форму рельєфу на деякому рівні. Коли нанесення штрихів завершувалося, допоміжні лінії стиралися.

Широке застосування штрихів для зображення рельєфу місцевості було обумовлено змістовністю і наочністю карт і планів, виконаних цим способом. Картографи передавали додаткову інформацію про рельєф, застосовуючи різної товщини штрихи, кут нахилу штрихування. Досягався хороший пластичний ефект, і з'являлася можливість візуального аналізу рельєфу, що особливо важливо було для вирішення військово-тактичних завдань.

Однак способу зображення рельєфу штрихами притаманні і суттєві недоліки: він досить трудомісткий, закриває інші умовні позначки, не дає можливості точно визначити відносне перевищення точок місцевості, не дозволяє зобразити в деталях всі незначні складки місцевості у рівнинних районах. Приклади

зображення рельєфу місцевості методом штрихування проілюстровано на рисунку 1.2.

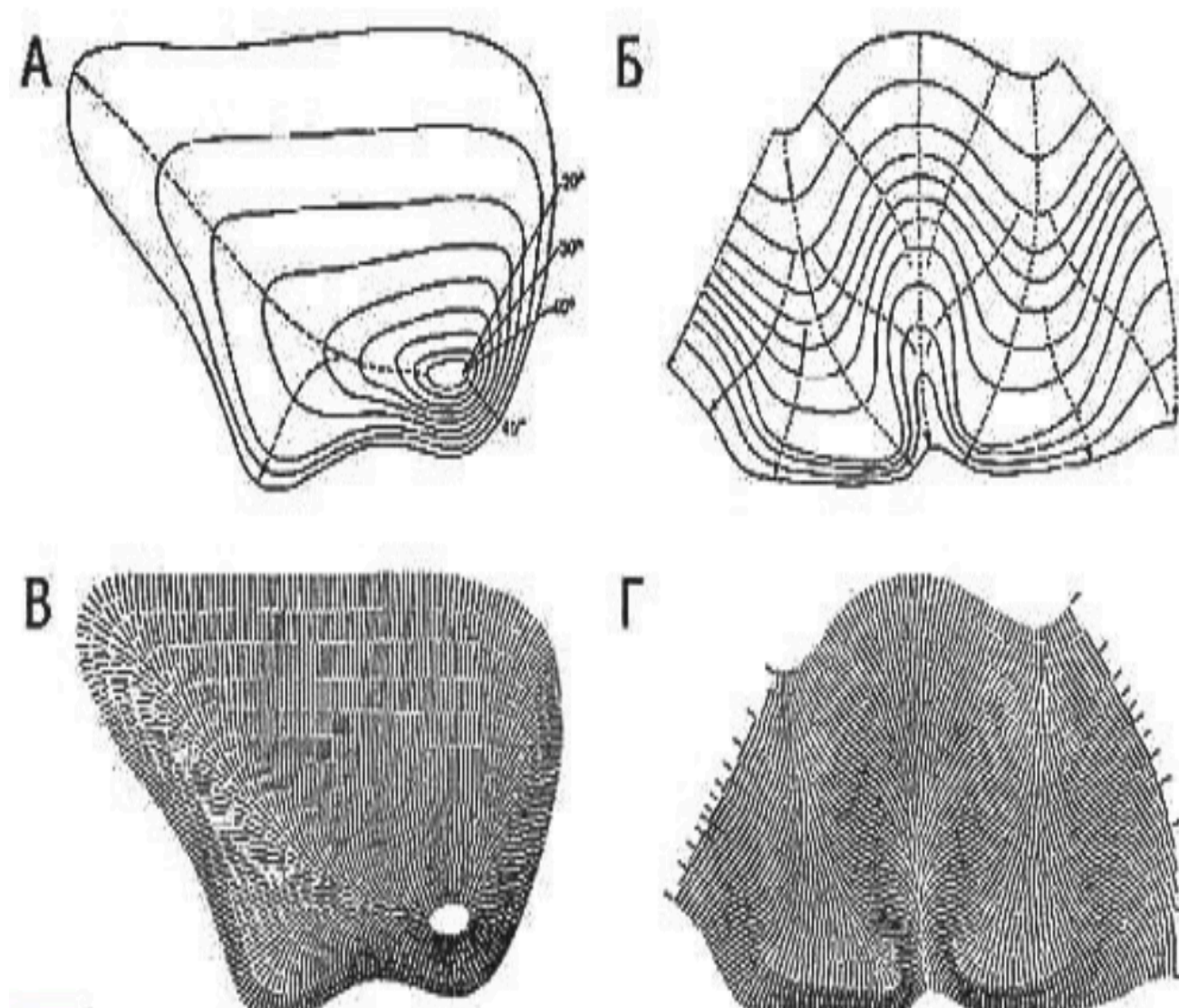


Рисунок 1.2 - Зображення рельєфу методом штрихування

### 1.1.3 Відмивка рельєфу

Третій спосіб зображення рельєфу - відмивка - застосовується в даний час при зображенні рельєфу на географічних картах масштабів від 1: 2 000 000 і дрібніше, оскільки на дрібних масштабах зобразити рельєф горизонталями не представляється можливим.

Відмивка - спосіб зображення рельєфу півтонами і тіньової пластикою при косому освітленні, що дозволяє надати плоскій карті

деяку об'ємність, тобто ілюзію опуклості. Мізерного погляду на план або карту, виконаний способом відмивки, досить, щоб отримати візуально-наочне уявлення про рельєф зображеної місцевості.

Суша на картах, виконаних способом відмивки, зображується в коричневих тонах - чим вище ділянку поверхні, тим темніший колір цієї ділянки. Зниження і низовини (нижче 200 м над рівнем моря) позначаються зеленими тонами.

Рельєф морського дна вказується в синіх, блакитних або зелених тонах - чим нижче від поверхні моря розташована ділянка дна, тим темніше забарвлення цієї ділянки на карті.

Поверхня суші або морського дна, розташована в межах 200 м від рівня моря (нижче або вище), зображується в нейтральному кольорі, зазвичай білому.

На планах відмивка рельєфу по горизонталях проводиться в тому випадку, якщо необхідно дати наочне, художньо виконане уявлення про рельєф місцевості, наприклад при створенні генерального плану забудови місцевості складного рельєфу (гірських районів і т. д.).

#### **1.1.4 Метод горизонталей**

Вже на кінець XIX століття збільшення вимог до змісту карт обумовили необхідність більш точного зображення рельєфу на картах, в результаті чого був розроблений спосіб зображення рельєфу горизонталями, який поступово замінив штрихи і отримав загальне визнання. Цей спосіб зображає рельєф тонкими кривими лініями (ізолонії), що з'єднують точки, які знаходяться на однаковій висоті над рівнем моря. Цим самим давалася можливість визначати по карті висоти точок і їх взаємне перевищення і виміряти крутизну схилів.

Розвиток і впровадження способу зображення рельєфу горизонталями стало можливим зі створенням інструментів і приладів, які дозволяли швидко і достатньо точно визначати на місцевості взаємне перевищення точок під час зйомок. Розглянемо більш детально спосіб зображення рельєфу горизонталями, який є на даний час основним і застосовується на топографічних планах і картах.



Сутність способу зображення рельєфу горизонталями, як вже зазначалося вище, полягає в тому, що всі нерівності місцевості відображаються кривими замкненими лініями, що з'єднують точки цих нерівностей, які мають однакову висоту над рівнем моря. Ці лінії проводять через визначені проміжки по висоті, наприклад, через 5, 10 або 20 м. Таку умовну лінію можна уявити собі на місцевості як шлях руху пішохода, який йде без спуску і підйому по горі або ложині на визначеній висоті над рівнем моря.

Для того щоб усвідомити сутність зображення рельєфу горизонталями, уявимо собі модель гори (рисунок 1.3), яка переріzana горизонтальними площинами, розміщеними одна над одною на рівних відстанях по висоті. Обводячи олівцем на папері основу гори і всі сліди перерізу її горизонтальними площинами, отримаємо ряд кривих замкнутих ліній, що з'єднують точки з однаковою висотою над основою гори. Ці лінії називаються горизонталями. На топографічних картах горизонталі друкуються коричневою фарбою [4]. Принцип зображення рельєфу горизонталями можна побачити на рисунку 1.3.

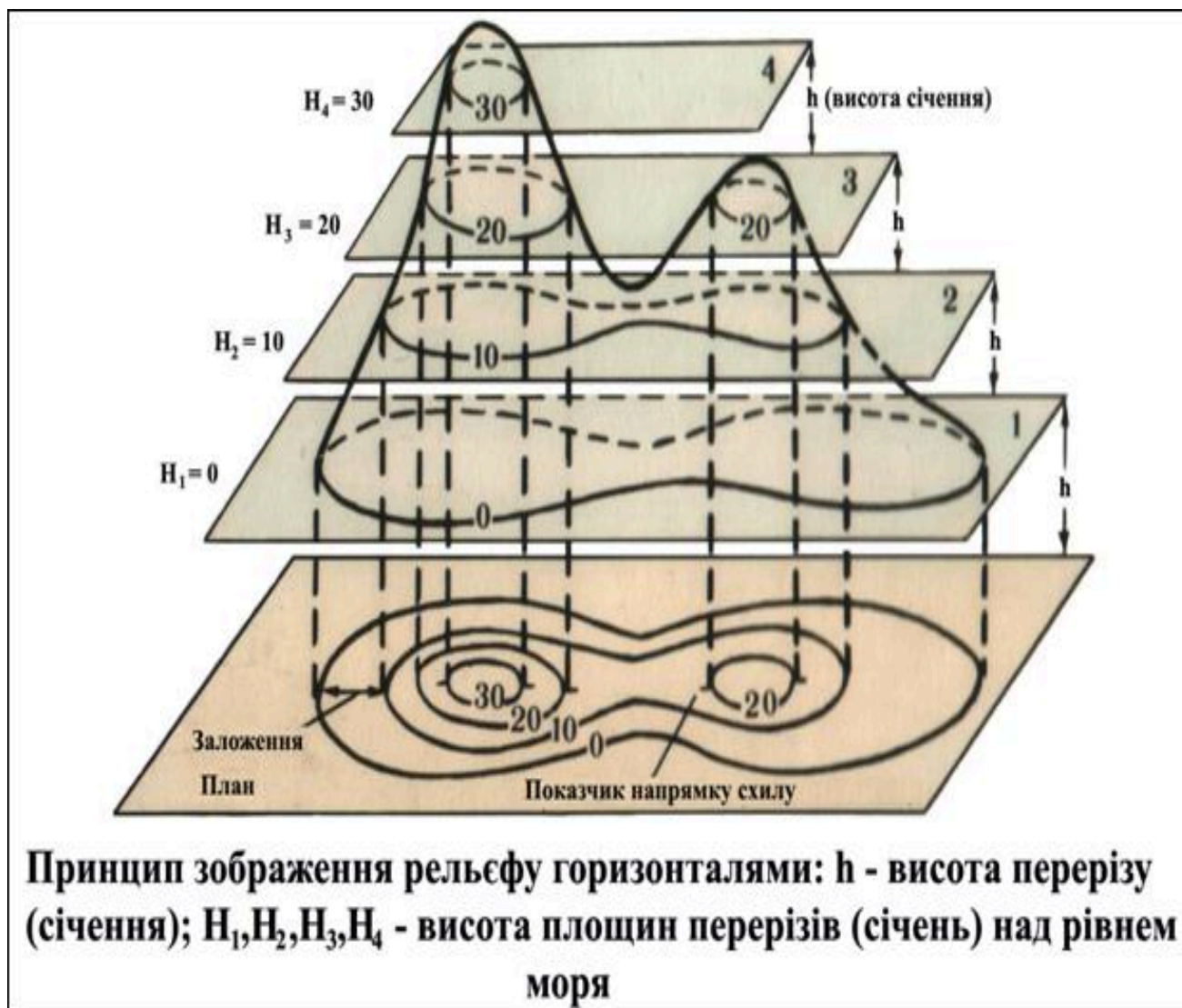


Рисунок 1.3 - Принцип зображення рельєфу горизонталями

Ізолінії — лінії на картах, планах, проекціях або інших графіках, які з'єднують точки з однаковим значенням будь-якої величини. Ізолінії використовуються для зображення на картах або маркшейдерсько-геологічних графічних документах ліній з однаковими значеннями абсолютних висот (ізогіпси), температур порід (ізотерми), магнітних схилень (ізогони), атмосферного тиску (ізобари), глибин і потужності покладу, вмісту в гірських породах хімічних елементів, сполук або мінералів, геоморфологічних та геофізичних величин тощо.

Найпоширеніші ізолінії: ізобари, ізобати, ізогаліни, ізогієти, ізогіпси, ізогони, ізодинами, ізосейсти, ізотерми.

Типи ізоліній:

- ізобата — ізолінія глибин океану, моря, озера;

- ізобронта — ізолінія однакової кількості днів із грозою;
- ізохазма — ізолінія повторюваності полярних сьйв;
- ізотерма — лінія однакових температур води чи повітря;
- ізогаліни — ізолінії однакової солоності води. Лінія (чи поверхня), яка з'єднує точки з однаковим вмістом солей в підземних водах чи поверхневих водних об'єктах;
- ізопікни — лінії однакової густини води;
- ізогони — лінії з однаковим магнітним схиленням;
- ізобара — лінії однакових атмосферних тисків;
- ізокліни — лінії рівних магнітних нахилень;
- ізоплети — лінії однакових значень довільної метеорологічної, чи океанологічної, величини (зазвичай на графіку);
- ізостери — лінії однакових питомих об'ємів на діаграмах морських гідрологічних розрізів;
- ізогієти — лінії, які на карті з'єднують точки з однаковими показниками атмосферних опадів;
- ізоанемони — ізолінії середньорічної швидкості вітру;
- ізоаномали — лінії, які з'єднують на гравіметричних картах точки з рівними значеннями аномалій прискорення сили тяжіння;
- ізовмісти — лінії, що з'єднують точки з однаковими величинами вмісту того чи іншого компонента корисної копалини;
- ізоглибини — лінії, які з'єднують точки з однаковими глибинами залягання корисних копалин;
- ізоградієнти — лінії, які з'єднують точки з однаковими градієнтами поверхні;
- ізокореляти — лінії, які з'єднують точки з однаковими величинами коефіцієнта кореляції;
- ізорахії — ізолінії висоти морських припливів;
- ізорезистиви — лінії однакових електричних опорів гірських порід при електророзвідці методом опорів.

Сукупність ізоліній дає наочне уявлення про розподіл досліджуваної величини на поверхні, в горизонтальній чи вертикальній площині [5].

В геодезичній практиці зазвичай застосовується спосіб зображення рельєфу місцевості за допомогою горизонталей, їх ще називають ізогіпсами, як найбільш наочний і досконалий, що дає повне уявлення про рельєф. Даний спосіб дозволяє вирішувати всілякі завдання на рельєф, наприклад: визначення відміток точок місцевості, крутизну схилів і скатів, взаємне перевищення точок і інші подібні завдання, вирішення яких викликається практикою, головним чином - інженерного будівництва та військової справи.

Горизонталь, ізогіпса — лінія на плані (карті), яка з'єднує точки земної поверхні з однаковою абсолютною висотою. Горизонталі служать основним способом зображення рельєфу земної поверхні на планах та картах. Горизонталі, що відстоять одна від одної на прийняту для даної карти висоту перетину рельєфу, називають основними. Для зображення деталей рельєфу, що не виражаються основними горизонталями, застосовуються додаткові, проведені через половину основного перетину. Використання горизонталей дозволяє визначати абсолютні і відносні висоти точок, будувати профіль місцевості й ін. Широко використовуються при вирішенні багатьох інженерних завдань (планування доріг, обчислення обсягів земляних робіт тощо) [6]. Зображення горизонталей на топографічній карті можна побачити на рисунку 1.4.



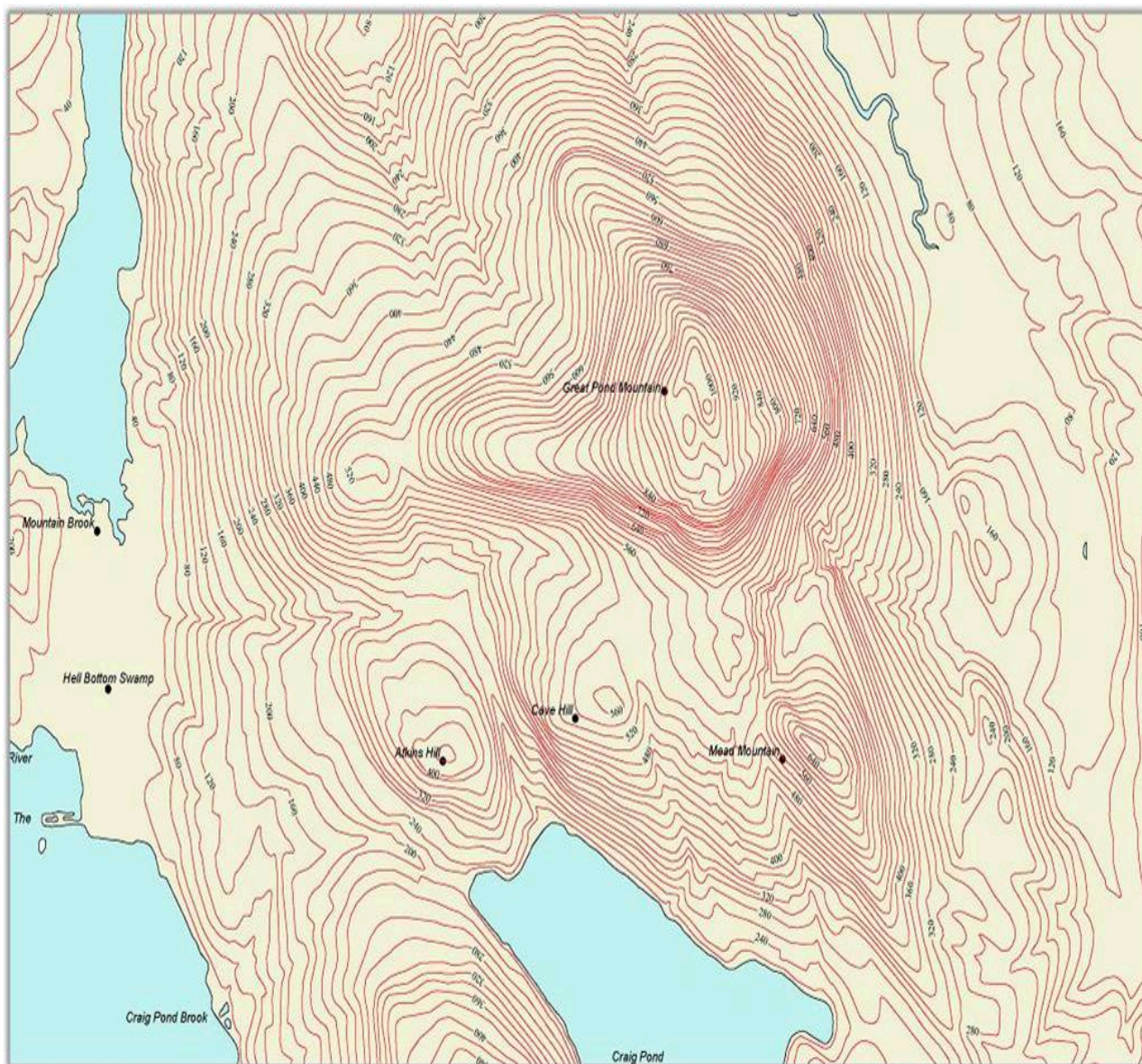


Рисунок 1.4 - Зображення горизонталей на топографічній карті

Також існують додаткові горизонталі - напівгоризонталі.

Напівгоризонталі — ізолінії, які проводяться через інтервал, що дорівнює половині прийнятої висоти перетину рельєфу, для зображення його особливостей, які не відображаються основними горизонталями [7].

Горизонталі отримують умовним перетином об'єктів рельєфу місцевості (підвищень, знижень) горизонтальними площинами, з нанесенням на карту (або план) ліній перетину цих площин з землею поверхнею. Кожна горизонталь, виконана на карті або плані місцевості, позначає сукупність точок поверхні цієї місцевості, розташованих на одному рівні щодо рівня моря.

Щоб можна було розрізняти піднесення і зниження, уздовж кожної горизонталі наносяться коротенькі штрихи - бергштрихи. Для підвищень (гори, пагорби і т. д.) бергштрихи розташовані всередині замкнутої лінії горизонталі, а для знижень (улоговини, западини і т. д.) - зовні.

**Бергштрих** - риска, яка проведена перпендикулярно до ізолінії, яка вільним кінцем вказує напрямом зменшення величини, що позначає ізолінія (для горизонталей - в якому напрямку знижається схил). Від самого початку бергштрих використовували при зображенні рельєфу місцевості горизонталями, для більш легкого визначення напрямку схилів [8].

Вертикальна відстань між сусідніми січними горизонталями називають висотою перетину, а відстань між ними вздовж схилу по проекції - закладенням. Крутизна схилу (кут між напрямком схилу і його закладенням) наочно визначається за формою залягання - чим ближче ділянки сусідніх горизонталей розташовані один до одного, тим крутіше в цьому місці схил. Скати крутіше 45 град. зображуються на планах умовними знаками, оскільки графічне зображення дає велику похибку. Зазвичай на топографічних картах закладення (відстань між сусідніми горизонталями) приймають рівним крутизни місцевості в градусах, т. Е. Відстань між горизонталями, рівне 1 градусу на карті, відповідає 1 градусу крутизни схилу на місцевості.

Зазвичай, на топографічних картах прийняті наступні висоти перетину (відстані між сусідніми січними площинами) для проектування ділянок рельєфу місцевості:

- 2,5 м - для карт масштабу 1:10 000;
- 5,0 м – для карт масштабу 1:25 000;
- 10,0 м - для карт масштабу 1:50 000;
- 20,0 м - для карт масштабу 1: 100 000;
- 40,0 м - для карт масштабу 1: 200 000;
- 50,0 м - для карт масштабу 1: 500 000 і дрібніше.

Як уже згадувалося вище, на картах, що мають невеликий масштаб (менше 2 000 000), горизонталі для зображення рельєфу майже не застосовуються. Відносне положення горизонталі до рівня моря зображується в розривах горизонталей цифровою відміткою, яка б показала перевищення або зниження над або під рівнем моря в метрах.

## 1.2 Інтерполяція даних

Майже завжди вибірки випадкових чисел (отримані в результаті експерименту або згенеровані в рамках методів Монте-Карло[9]) зберігаються на комп'ютерах у вигляді масивів, тобто дискретних даних  $y_i(x_i)$ . Розв'язуючи різного роду задач виникає необхідність оперувати неперервною випадковою функцією  $y(x)$  однієї або декількох змінних, що відповідає неперервному випадковому процесу. Для отримання  $y(x)$  необхідно побудувати інтерполяційну залежність в проміжках між точками [10].

Інтерполяція-екстраполяція являє собою об'єднання точок вибірки даних  $(x_i, y_i)$  кривої тієї або іншої ступені гладкості [11]. По визначенню, інтерполяція означає побудова функції  $f(x)$ , яка апроксимує залежність  $y(x)$  в проміжних точка(між  $x_i$ ) Тому інтерполяцію ще називають апроксимацією. В точках  $x_i$  значення інтерполяційної функції повинні співпадати із вхідними даними, тобто  $f(x_i) = y(x_i)$ .

### 1.2.1 Лінійна інтерполяція

Найпростіший вид інтерполяції – це кусково-постійна [12]. Суть її полягає в тому, що на кожному проміжку між експериментальними точками  $f(x)$  являє собою константу, яка дорівнює значенню випадкової величини на лівій (рисунк 1.5) або рідше правій границі.

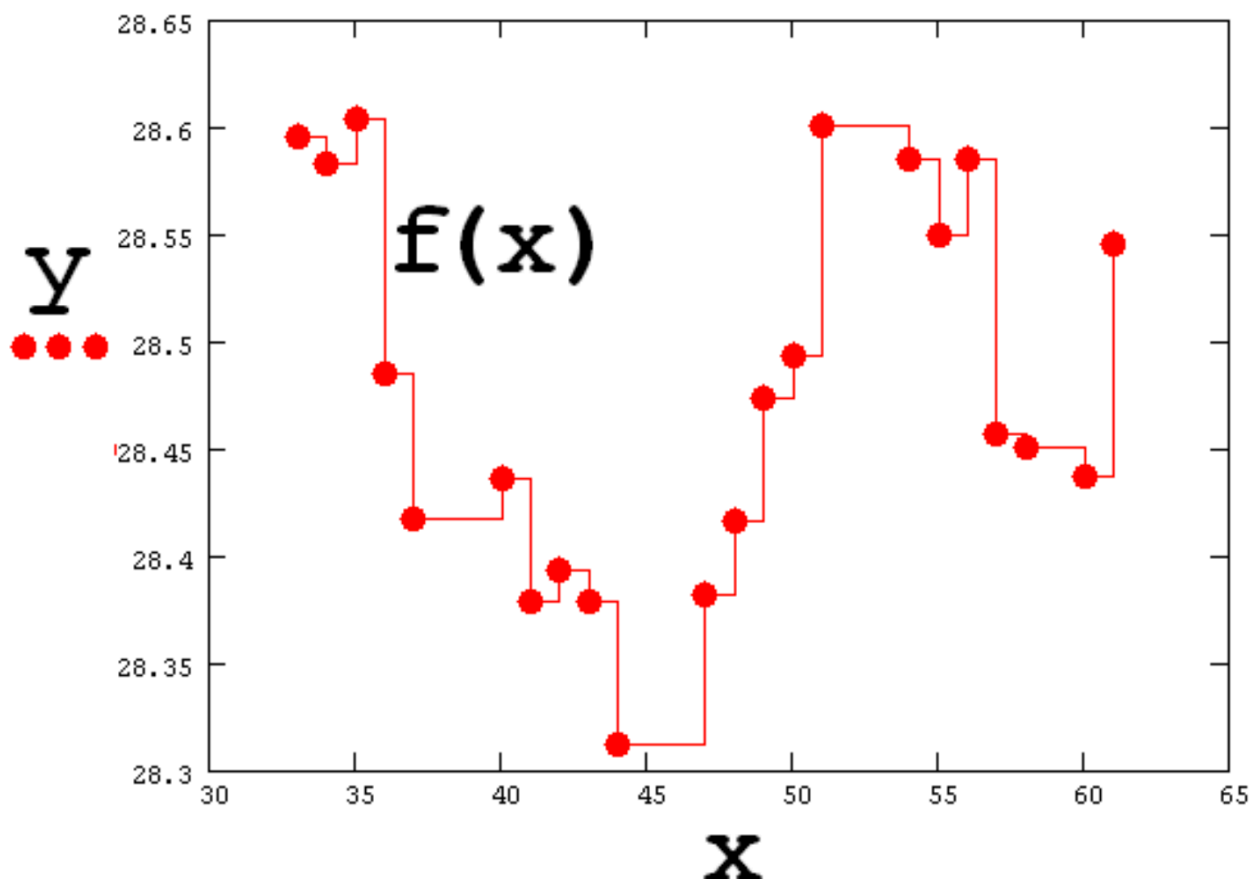


Рисунок 1.5 - Кусково-постійна інтерполяція

Мінус такого підходу заключається в тому, що ні отримана інтерполяція, ні її похідна не являються неперервними функціями.

Трохи складніше виглядає кусково-лінійна інтерполяція (1.1), яка представляє шукану залежність у вигляді ламаної лінії. Інтерполяційна функція  $f(x)$  складається із відрізків прямих, які з'єднують дані «від точки до точки».

Наведемо формулу кусково-лінійної інтерполяції:

$$f(x) = y_i \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} + y_{i+1} \cdot \frac{x - x_i}{x_{i+1} - x_i} \quad (1.1)$$

і оцінку її погрішності, тобто максимального відхилення  $f(x)$  від невідомої «справжньої» функції  $F(x)$ :

$$|f(x) - F(x)| \leq \frac{h^2}{8} \cdot \max (F''(x)) \quad (1.2)$$

Таким чином, погрішність (1.2) визначається другою похідною функції  $F(x)$  і спадає пропорційно квадрату кроку  $h$  між даними.



### 1.2.2 Сплайн інтерполяція

У більшості практичних застосуваннях бажано з'єднати експериментальні точки не ламаною лінією, а гладкою кривою. Краще за все для цих цілей підходить інтерполяція сплайнами, тобто фрагментами поліномів. Сенс сплайн-інтерполяції заключається в тому, що в кожному проміжку між вузловими точками (на кожному кроці інтерполяції) здійснюється апроксимація у вигляді певної поліноміальної залежності  $f(x)$  [13]. При цьому для кожного кроку виходить свій поліном, причому його коефіцієнти підбираються такими, щоб на границях кроку виконувались умови зшивки. А іменно, якщо застосовуються сплакни у вигляді поліномів степеня  $m$ , то нескладно показати, що їх коефіцієнти можна вибрати так, щоб забезпечити неперервність похідних порядку до  $(m - 1)$ -й включно [14].

Найчастіше застосовуються кубічні сплайни, тобто поліноми третього степеня (кубічні параболи):

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (1.3)$$

Коефіцієнти  $a, b, c, d$  у розраховуються незалежно для кожного проміжку інтерполяції, виходячи із значень  $y_i$  в сусідніх точках. Ділянки парабол називаються кубічними сплайнами [15, 16].

Формули для розрахунку кубічної сплайн-інтерполяції. Шукана функція (1.3) на проміжку між  $x_i$  та  $x_{i+1}$  обраховується наступним чином:

$$\begin{aligned} f(x) = & \frac{(x_{i+1} - x)^2 \cdot (2(x_i - x) + h) \cdot y_i}{h^3} + \frac{(x_{i+1} - x)^2 \cdot (x - x_i) \cdot m_i}{h^2} \\ & + \frac{(x_{i+1} - x)^2 \cdot (2(x_i - x) + h) \cdot y_{i+1}}{h^3} \\ & + \frac{(x_{i+1} - x) \cdot (x - x_i)^2 \cdot m_{i+1}}{h^2} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Де

$$m_i = \frac{(y_{i+1} - y_{i-1})}{2h} \quad (1.5)$$

$$m_0 = \frac{(-3y_0 + 4y_1 - y_2)}{2h} \quad (1.6)$$

$$m_N = \frac{(3y_N + 4y_{N-1} - y_{N-2})}{2h} \quad (1.7)$$

Кубічна сплайн-інтерполяція забезпечує рівність у вузлах не тільки найбільш сусідніх параболічних інтерполяційних функцій(сплайнів), але і їх перший та других похідних[17]. Завдяки цьому сплайн-інтерполяція виглядає дуже гладкою (рисунок 1.6).

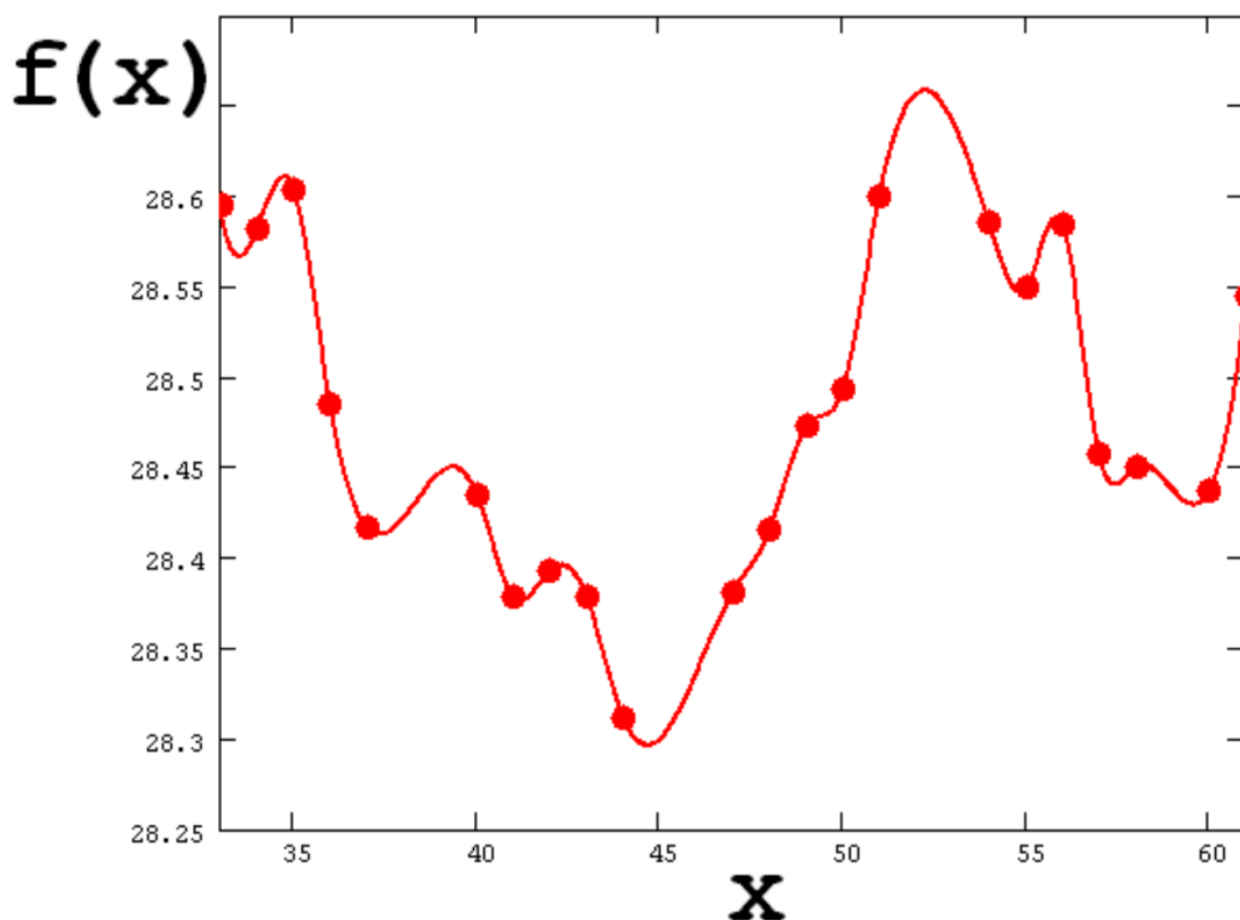


Рисунок 1.6 - Сплайн-інтерполяція

Відмітимо, що формули (1.4) – (1.7) – це не єдиний спосіб побудови кубічних сплайнів. Існує декілька способів у визначенні сплайн-інтерполяції: які в більшості випадків не приводить до будь-якого значного ефекту [18]. На рисунку 1.7 зображено фрагмент графіка б який інтерполюється двома способами [19].

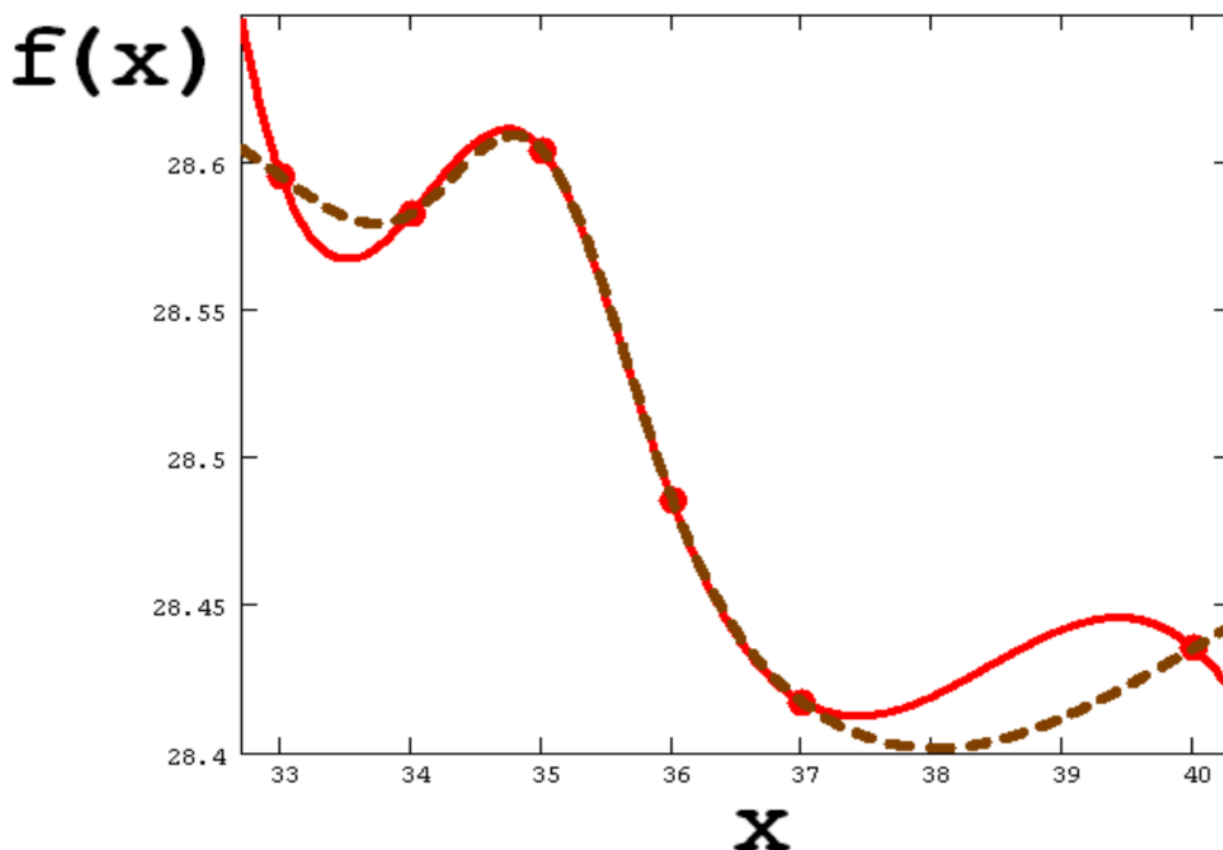


Рисунок 1.7 - Сплайн-інтерполяція двома способами

### 1.2.3 Багатовимірна інтерполяція

Багатовимірна інтерполяція означає побудова функції, яка проходить через точки, що задані не на площині, а в просторі (трьох-, чотирьохвимірному і т.д.). Таким чином, замість залежності  $y_i = y(x_i)$ , яку ми апроксимуємо функцією  $f(x)$ , потрібно побудувати інтерполяції по заданих  $w(x_i, y_i, \dots)$ , тобто знайти функцію декількох координат  $f(x, y, \dots)$ . В двовимірному випадку аргументів всього два (наприклад,  $x$  та  $y$ ).

Якщо вузли розташовані в формі правильної сітки, наприклад, у двовимірному випадку, у вигляді прямокутної сітки, то із побудовою багатовимірної інтерполяції принципіальних проблем не виникає [20]. Найпростіші типи інтерполяції – це кусково-постійна (проілюстровано на рисунку 1.8) і кусково-планарна (принцип її побудови проілюстрований на рисунку 1.9, на якому зображений графік функції, що інтерполюється на елементарному фрагменті сітки) [21].

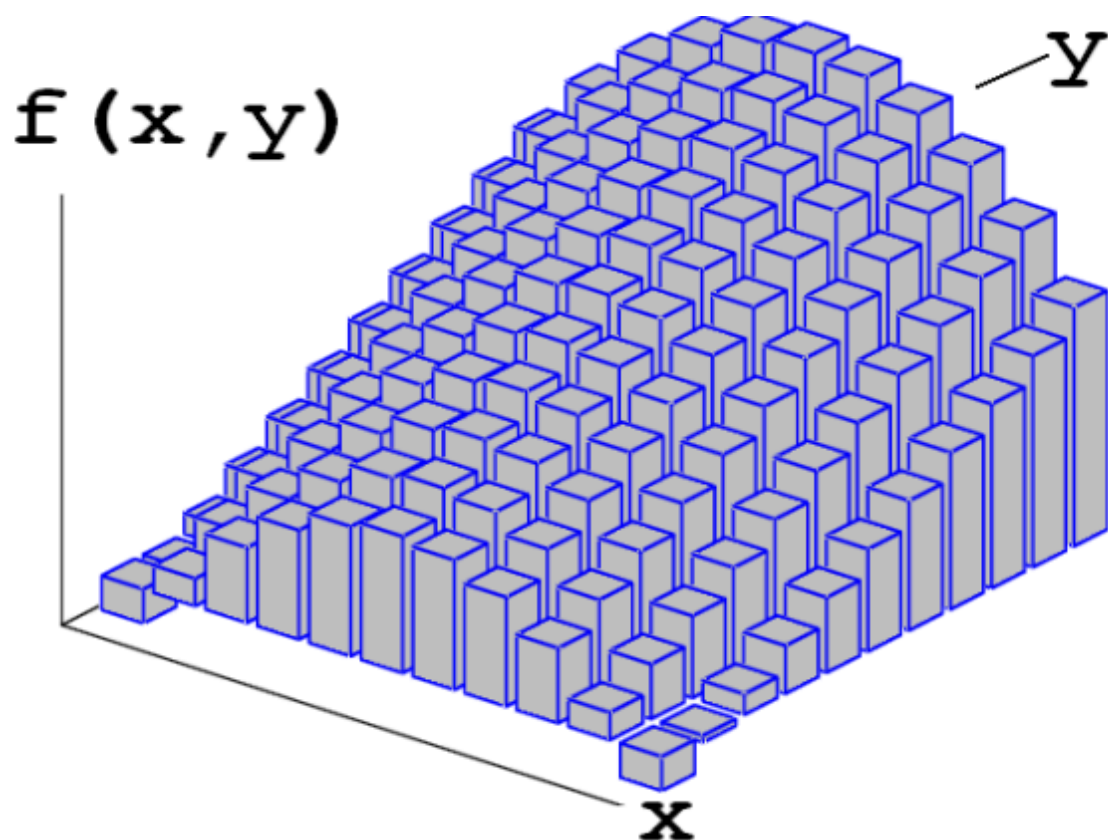


Рисунок 1.8 - Кусково-постійна двовимірна інтерполяція

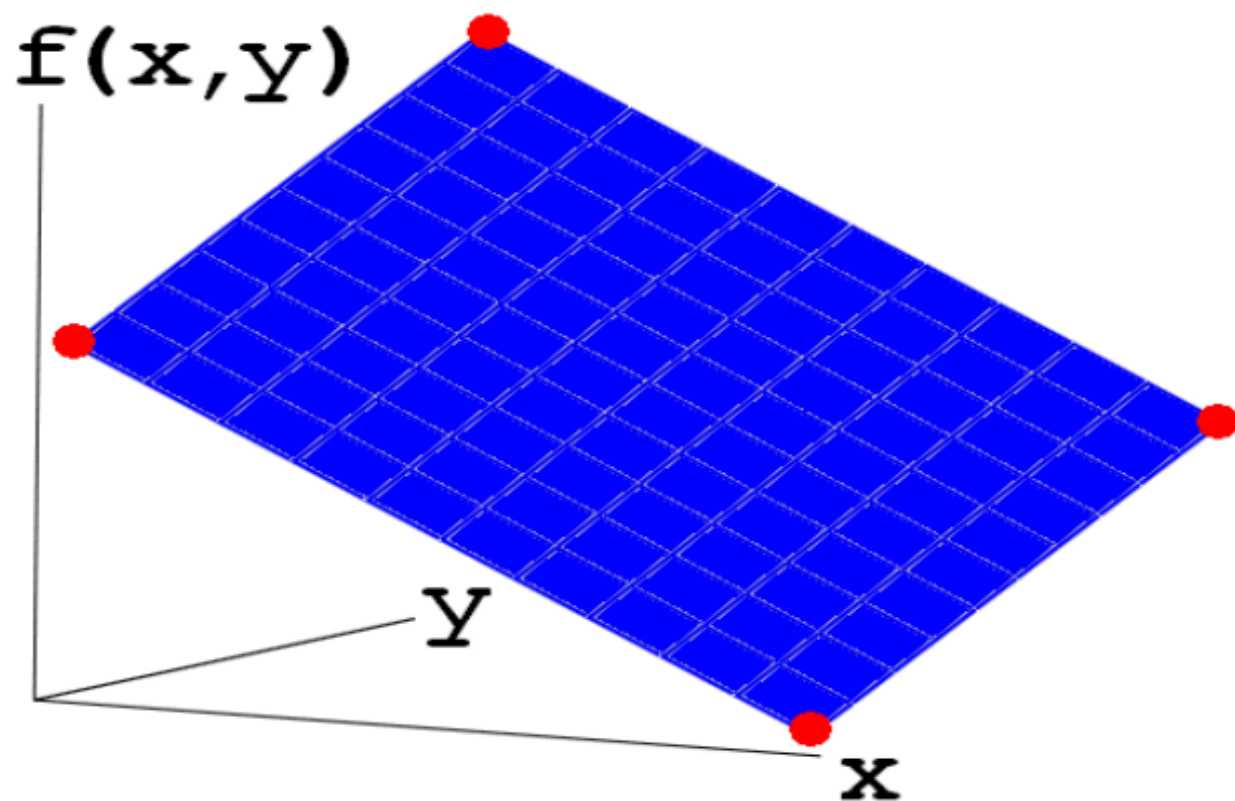


Рисунок 1.9 - Кусково-планарна інтерполяція

Трохи складніше, якщо вихідна вибірка не прив'язана до сітки, а являє собою розріджені ряди даних. Така ситуація дуже типова для геофізичних експериментів, які часто передбачають реєстрацію різного роду параметрів (метеорологічних, геомагнітних і т.д.) в певних точках на поверхності Землі (станціях спостереження) [22].

В якості прикладу вхідних даних приведемо часові виміри деякого параметра в декількох точках порівняно невеликого регіону (рисунок 1.10). Фактично, ми маємо вибірку випадкового поля  $w(\theta, \phi, t)$ , яке залежить не тільки від просторових (полярних) координат  $\theta$  та  $\phi$ , але й від часу  $t$ .

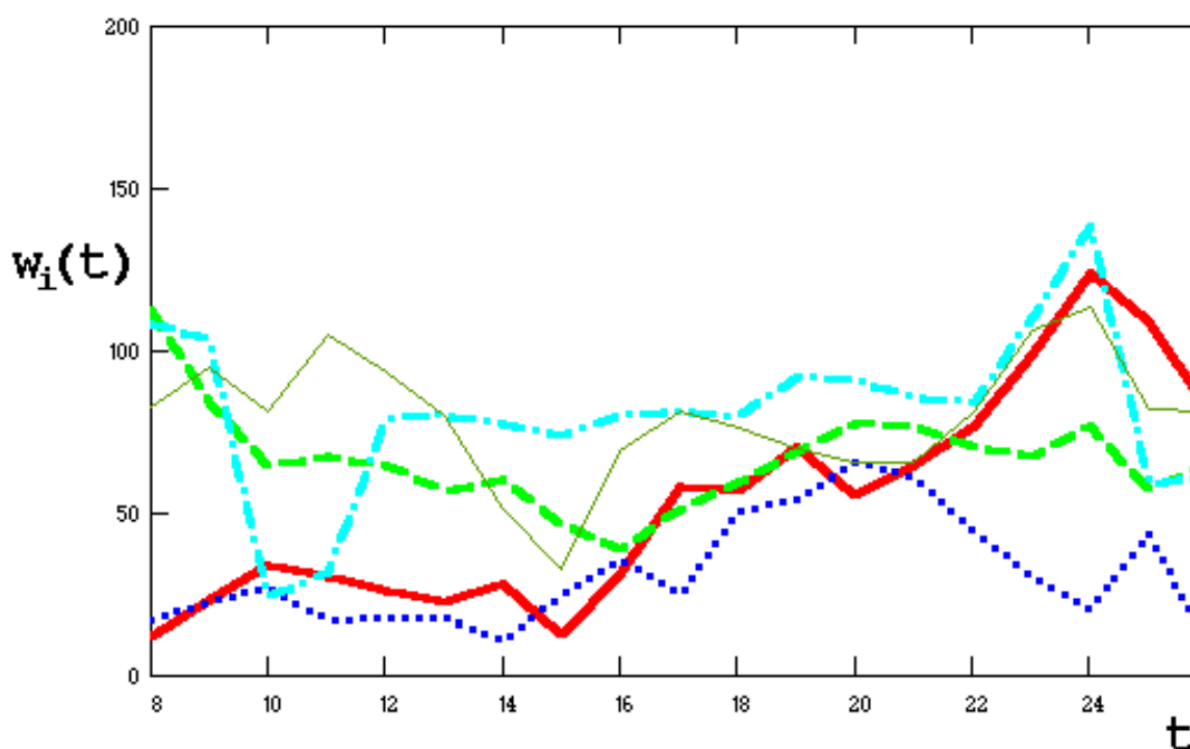


Рисунок 1.10 - Геофізичні виміри (п'ять станцій спостереження)

Співставлення кривих для кожної із станцій спостереження дозволяє прослідкувати відмінність і схожість вимірів. Маючи в регіоні навіть всього лиш декілька вимірювальних точок з координатами  $(\theta_L, \phi_L)$ , де  $L$  - індекс станції вимірювання, можна апроксимувати по ним неперервну функцію  $W(\theta, \phi)$ , для деякого околу цих точок [20]. Наведемо приклад такої апроксимації [6], побудувавши її спочатку по просторовим координатам (для кожного окремого моменту часу вимірювань), а на завершальній стадії по часу.

В якості апроксимуючої функції візьмемо наступне співвідношення:

$$W(\theta, \phi) \approx C \sum_L W_L / \rho_L^2(\theta, \phi) \quad (1.8)$$

де  $\rho_L(\theta, \phi)$  - відстань від будь-якої точки  $(\theta, \phi)$  до  $L$ -ї вимірювальної станції,  $W_L$  - вимірювання на цій станції,  $C$  – нормувальний множник, який залежить від координат точки  $(\theta, \phi)$  [21]. У співвідношенні (1.8) чим ближче точка  $(\theta, \phi)$  знаходиться до  $L$ -ї станції, з тим більшою вагою береться відповідний доданок  $W_L$ . Якщо знехтувати сферичністю Землі (тобто розглядати не дуже великий регіон), то апроксимуюча функція матиме вигляд:

$$W(\theta, \phi) \approx C \sum_L \frac{W_L}{(\theta - \theta_L)^2 + (\phi - \phi_L)^2} \quad (1.9)$$

а нормувальний множник буде наступний:

$$C(\theta, \phi) = \left( \sum_L \frac{1}{(\theta - \theta_L)^2 + (\phi - \phi_L)^2} \right)^{-1}$$

В окремому випадку вузлів, тобто якщо  $(\theta, \phi) = (\theta_L, \phi_L)$ , апроксимація береться в очевидному вигляді  $W(\theta, \phi) = W_L$ , а не по формулі (1.9).

Результат роботи описаного алгоритму наведено на рисунку 1.11, який ілюструє просторовий розподіл  $W(\theta, \phi, t = \text{const})$ , у вигляді ліній, відповідно до формули (1.9).

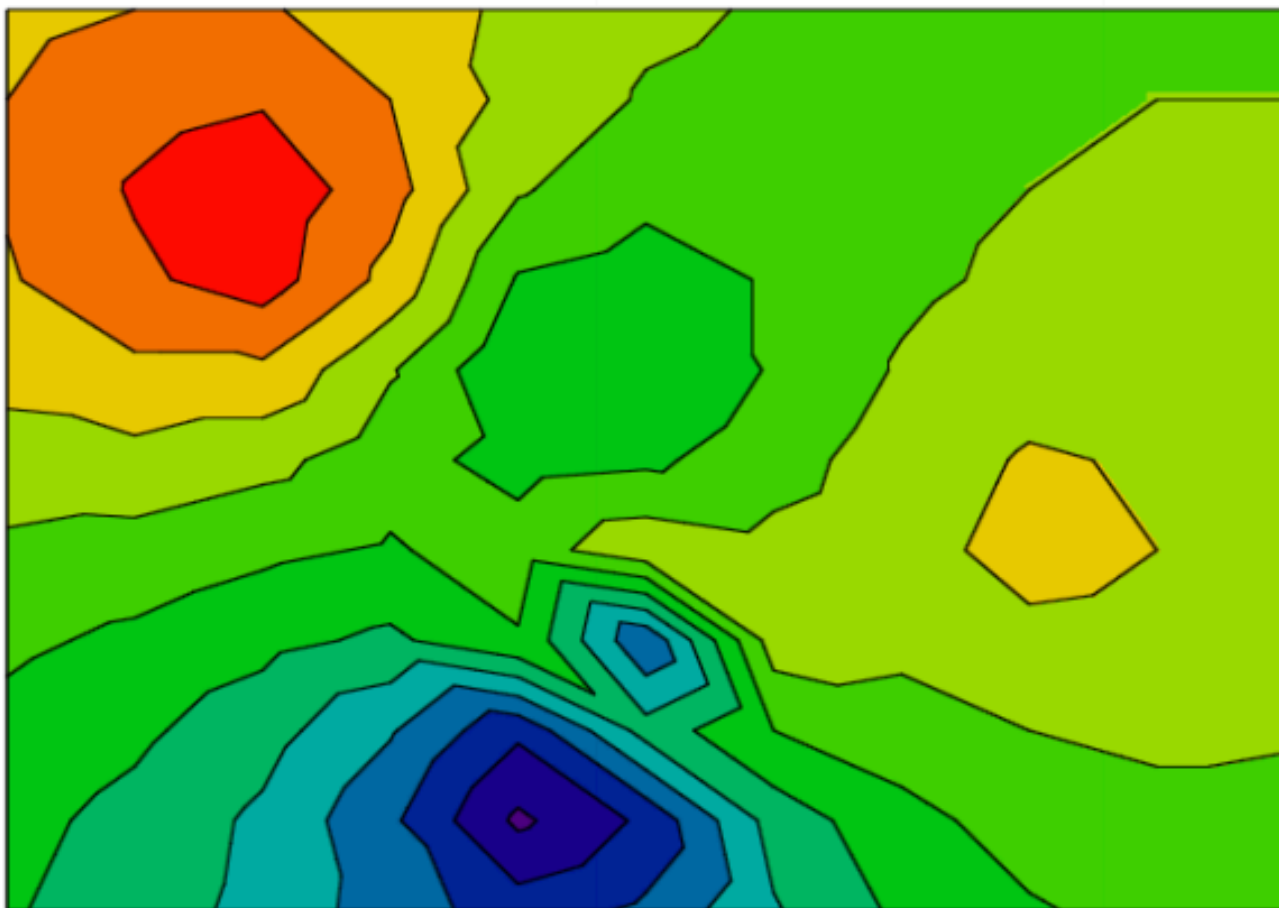


Рисунок 1.11 - Інтерполяція по розрізненим даним

Покращити візуалізацію отриманого поля можна шляхом повторної інтерполяції більш гладкою функцією [23]. Оскільки перша задача(перехід від розрізнених даних до сітки) вирішена, то тепер нескладно запустити алгоритм двовимірної сплайн-інтерполяції, щоб перейти від грубої сітки до більш детальної. Відповідний результат наведений на рисунку 1.12.

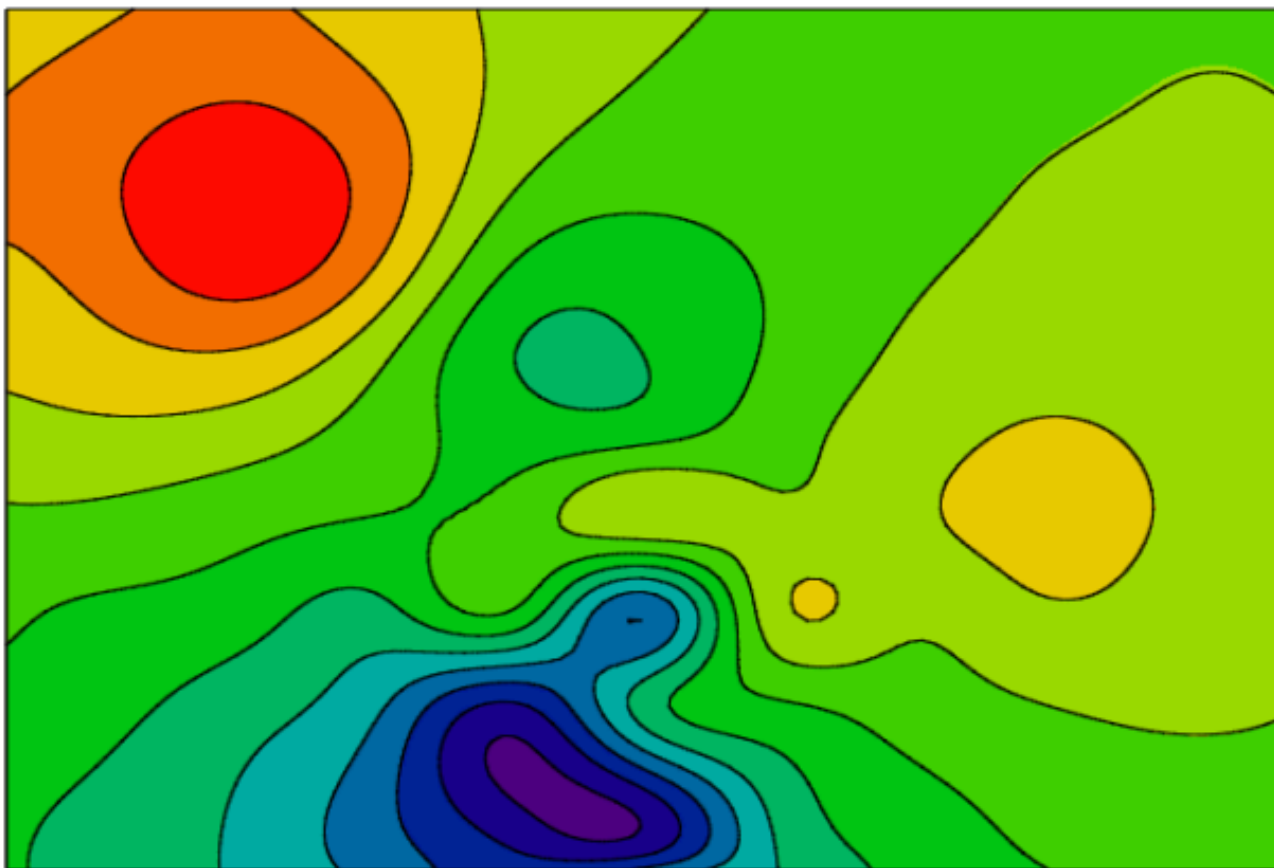


Рисунок 1.12 - Повторна двовимірна сплайн-інтерполяція

Обґрунтованість даного способу можна перевірити експериментально. Для цього апроксимуємо функцію  $W(\theta, \phi)$  не по всім даним п'яти вузлам, а по чотирьом вузлам  $L = 0 \dots 3$  (тобто виключимо із вихідного набору даних одну експериментальну точку). Потім по формулі (1.9) розрахуємо значення  $f(\theta_4, \phi_4)$  в п'ятому вузлі і порівняємо наскільки отримане значення відрізняється від реально виміряного в цій точці. На рисунку 1.13 зображено це порівняння апроксимації в одній із точок (пунктирна лінія) і вимірювань стації, що знаходиться в цій точці (суцільна лінія).



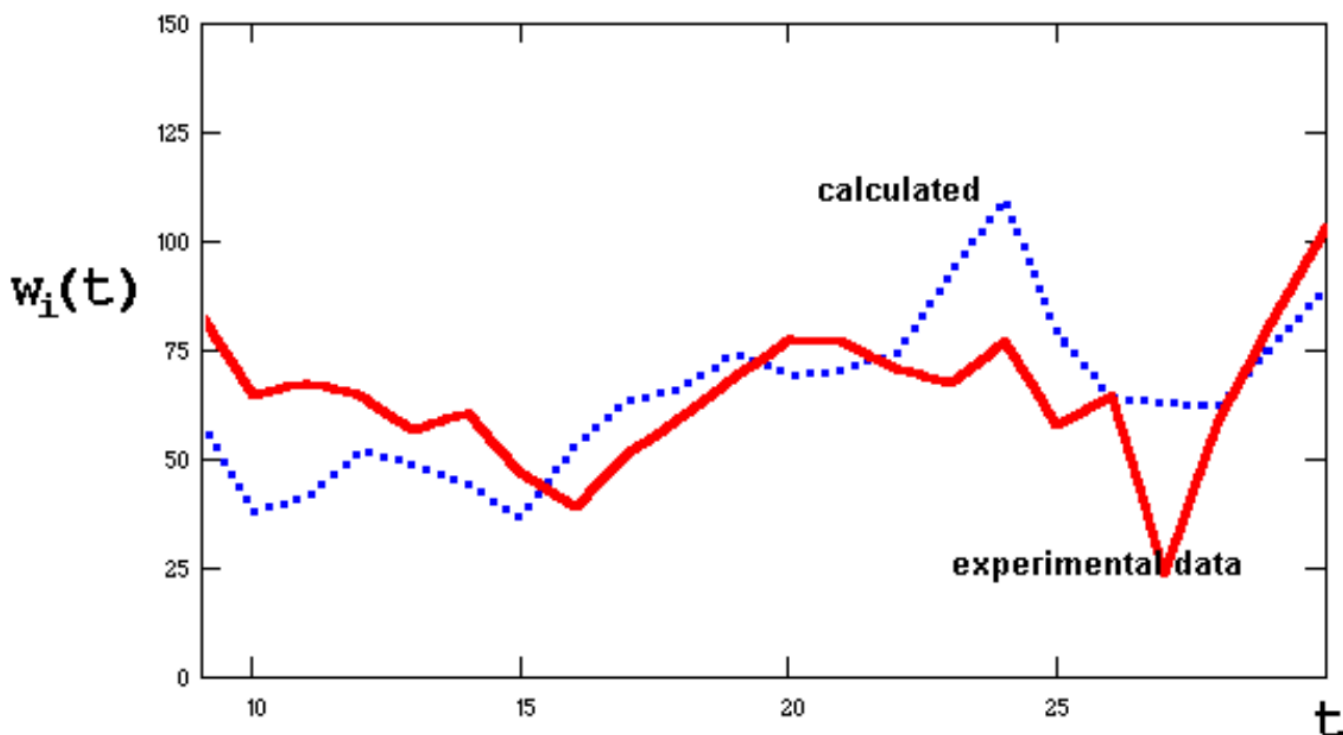


Рисунок 1.13 - Перевірка якості інтерполяції

Видно, що співпадіння хороше для перших 2/3 періоду вимірювань і гірше – для останньої третини.

### Висновок до розділу

У даному розділі наведено опис методів зображення рельєфу місцевості, переваги й недоліки кожного з методів. Виконано огляд кожного з підходів: починаючи від перспективного методу та закінчуючи методом горизонталей. Наведені приклади, для яких метод зображення рельєфу є найбільш підходящим.

Також описані загальні підходи інтерполяції даних. Виконаний огляд із прикладами інтерполяції графіків та поверхонь за дискретним набором точок. Наведені приклади для кожного із методів інтерполяції даних.

Описано процес побудови багатовимірної інтерполяції, що власне використовується в дисертації.

## 2 МОДЕЛІ ТА МЕТОДИ ПОБУДОВИ ЛОКАЛЬНОЇ МАПИ РЕЛЬЄФУ

### 2.1 Просторова інтерполяція

*Інтерполяція* – обчислення проміжних значень якої-небудь величини за деякими відомими її значеннями. Інтерполяція використовується в багатьох прикладних напрямках наук про Землю. У метеорології інтерполуються дані спостережень метеостанцій для одержання карт погоди на великі території, інтерполуються дані океанологічних і гідрологічних вимірювань, будуються поля концентрацій речовин у різних середовищах і т.ін. У геології інтерполяція застосовується для побудови двовимірних і тривимірних моделей підземних масивів за даними точкових шпар.

Для створення інтерпольованої карти як мінімум необхідний набір точок з даними про їх просторове положення (координати  $x$ ,  $y$  в користувальницькій системі чи у вигляді широти/довготи) і кількісне значення параметра ( $z$ ) у цих точках – висота, тиск, температура, концентрація забруднювача і т.ін. У більшості практичних випадків мережа таких вихідних точок (data point) нерегулярна, має різну щільність, великі розриви і т.ін.

Задачею просторової інтерполяції є побудова на основі мережі вихідних точок суцільної поверхні з заданим розміром кроку сітки вузлів, що розраховуються. Залежно від необхідної просторової точності вибирається різний крок (наприклад, ділянка розміром  $10 \times 10$  км може бути інтерпольована із кроком 100 м ( $100 \times 100$  вузлів сітки) чи з кроком 10 м ( $1000 \times 1000$  вузлів). На підставі числових значень точок даних розраховується значення для кожного вузла мережі, що інтерполуюється. Зазвичай процедура інтерполяції виконується для області прямокутної форми – растра.

В англomовній науковій літературі процедура побудови регулярної прямокутної сітки числових значень на основі мережі нерегулярних точок одержала уставлене найменування gridding, масив інтерпольованих по регулярній сітці даних – grid, окремий вузол інтерпольованої сітки – node. На основі регулярного масиву

даних  $x$ ,  $y$ ,  $z$  можливе проведення великої кількості аналітичних процедур, а також побудова різних видів графічних відображень поверхонь: ізолінійних зображень, блок-діаграм, напівтонових чи градієнтних зображень.

Існуючі методи інтерполяції можна поділити на дві великі групи – *глобальні* і *локальні*. Локальні методи інтерполяції, у свою чергу, поділяються на *локальні детерміновані* і *локальні стохастичні*.

## **2.2 Детерміновані методи просторової інформації**

### **2.2.1 Глобальні методи інтерполяції**

Глобальні методи інтерполяції одночасно використовують всі наявні дані для виконання прогнозу для всієї даної території, тоді як локальні методи оперують в межах невеликих зон навкруги належних інтерполяції вузлів для того, щоб забезпечити виконання оцінки тільки за даними, розміщеними у безпосередній близькості від точок прогнозу або оцінювання.

Глобальні інтерполяції зазвичай використовуються не для безпосередньої інтерполяції, а для дослідження і можливого видалення ефекту глобальних варіацій (тренду), обумовлених зовнішніми чинниками. Після того як глобальні ефекти будуть видалені, відхилення від глобальних варіацій можуть інтерполюватися з використанням локальних методів.

*Глобальні методи* зазвичай прості для обчислення і часто базуються на стандартних статистичних ідеях варіаційного аналізу і регресії. До них відносять:

- класифікації з використанням зовнішньої інформації;
- поліноміальну регресію з геометричними координатами;
- регресійні моделі.

*Класифікаційні методи* використовують досяжну інформацію (таку, як ґрунтові типи або адміністративні території) для того, щоб розділити досліджувану територію на регіони, які можуть бути охарактеризовані статистичними моментами (середньою, дисперсією) атрибутів, виміряних у точках, розміщених у межах цих регіонів.

Методи поліноміальної регресії з геометричними координатами  $x$ ,  $y$  використовують поліноми різних ступенів вигляду

$$f(x, y) = \sum_{r+s=p} (b_{rs} x^r y^s) \quad (2.1)$$

де  $b_{rs}$  – коефіцієнти полінома;  $p$  – порядок полінома.

Перші чотири доданки (2.1), тобто поліноми нульового, першого, другого і третього ступеня, є:

$b_{00}$	горизонтальна площина
$b_{00} + b_{10}x + b_{01}y$	похила площина
$b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2$	квадратична поверхня
$b_{00} + b_{10}x + b_{01}y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3$	кубічна поверхня

Поліном (2.1) представляє, по суті, рівняння *трендової поверхні* для заданого набору точкових значень. Ціле  $p$  є порядком трендової поверхні, для якої існує  $(p + 1)(p + 2) / 2$  коефіцієнтів  $b_{rs}$ , які потрібно підібрати для того, щоб мінімізувати функціонал:

$$\sum_{i=1}^n \{z(x_i, y_i) - f(x_i, y_i)\}^2$$

Таким чином, горизонтальна поверхня має порядок нуль, похила плоска поверхня – перший порядок, квадратична поверхня – другий порядок, кубічна поверхня з десятима коефіцієнтами має третій порядок. Знаходження коефіцієнтів  $b_{rs}$  є стандартною процедурою в задачах на множинну регресію, тому обчислення легко виконуються за допомогою стандартних статистичних пакетів.

Після знаходження коефіцієнтів  $b_{rs}$  трендова поверхня може бути відображена оцінкою значень  $z(x, y)$  у всіх точках регулярної мережі.

Порядок трендової поверхні  $p$  з формальної точки зору може бути скільки завгодно великим. Збільшення порядку полінома, як правило, веде до збільшення ступеня його відповідності реальній поверхні. Проте при цьому, з одного боку, втрачається фізичне значення побудови, з іншого – різко збільшуються вимоги до обсягу даних, необхідних для знаходження коефіцієнтів  $b_{rs}$ .

*Регресійні методи* ґрунтуються на використуванні можливого функціонального зв'язку між атрибутами, які легко вимірюються. Наприклад, концентрації забруднювача в ґрунті – від відстані до джерела забруднення, швидкості вітру – від шорсткості поверхні і т.п. Емпіричну регресійну модель часто називають *трансформаційною функцією*. Вона має вигляд

$$z(x, y) = b_0 + b_1A_1 + b_2A_2 + \dots + b_nA_n$$

де  $b_0, b_1, \dots, b_n$  – коефіцієнти регресії;  $A_1, A_2, \dots, A_n$  – незалежні характеристики (атрибути).

### 2.2.2 Локально-детерміновані методи інтерполяції

До *локальних детермінованих методів*, що найбільш часто використовуються для моделювання безперервних поверхонь в середовищі ГІС, відносять:

- метод найближчого сусідства (полігонів Тиссена – Вороного);
- метод середнього зважування обернено пропорційно відстані (дистанції);
- метод сплайнів.

*Полігони Тиссена – Вороного* становлять класифікаційну модель просторового прогнозу, яка для визначення атрибутів у необстежених місцеположеннях пропонує використовувати найближчі околиці окремих точок. Полігони Тиссена – Вороного ділять територію способом, який повністю визначається конфігурацією мережі точок вимірювань. Якщо точки лежать на регулярній мережі, полігони Тиссена – Вороного всі дорівнюють один одному, а розмір полігона дорівнює розміру елемента регулярної мережі. Якщо точки розміщені нерегулярно в просторі, то полігони Тиссена – Вороного є різними за розміром.

Полігони Тиссена – Вороного часто використовуються в ГІС і географічному аналізі як швидкий спосіб поширення точкових даних у просторі. Проте побудований просторовий розподіл не є плавним, оскільки має місце стрибкоподібна зміна значень змінної на межах полігонів, що суперечить її дійсній безперервній зміні в просторі (наприклад, атмосферних опадів, температур повітря, концентрації забруднювачів та ін.). У зв'язку з тим що є тільки одна точка вимірювань чи спостережень на полігоні, при використуванні даного методу немає можливості оцінки внутрішньої мінливості змінної.

*Метод середнього зважування обернено пропорційно до відстані (оберненої дистанції)* (Inverse Distance Method), що є частковим, але найбільш частим випадком *методу середнього зваженого*, або *ковзного середнього зваженого*, який об'єднує ідеї близькості, що використовуються методом полігонів Тиссена – Вороного, з повільними змінами трендової поверхні. Припущення, покладене в основу методу, полягає в тому, що значення атрибута  $z$  в довільній точці простору, в якій не проводилися вимірювання, є середнім зваженим по відстані із значень в точках вимірювань, розміщених по сусідству в межах певного радіуса або вікна навкруги цієї точки. В методах зворотної дистанції ваги точкових вимірювань беруться обернено пропорційними відстані до даної точки:

$$z(x_j) = \sum_{i=1}^n z(x_i) d_{ij}^{-r} / \sum_{i=1}^n d_{ij}^{-r} \quad (2.2)$$

де  $x_j$  – точки (вузли), для яких повинна бути інтерпольована поверхня, а  $x_i$  – точки з відомими значеннями;  $d_{ij}$  – відстані («дистанції») між точками з відомими значеннями і точкою оцінювання;  $r$  – показник ступеня;  $n$  – кількість точок з відомими значеннями, що потрапляють в окіл вузла оцінювання.

Оскільки в рівнянні (2.4) при  $d \rightarrow 0$   $d^{-r} \rightarrow \infty$  значення для вузла інтерполяції, яке збігається з точкою даних, повинне бути просто скопійовано. У зв'язку з цим даний метод належить до так званих «точних» методів інтерполяції. Найпростіша

форма цієї залежності ( $r=1$ ) забезпечує *лінійну інтерполяцію*, в якій вагові коефіцієнти обчислюються за лінійною функцією відстані між точками даних і точками інтерполяції. При  $r=2$ , тобто при значенні, яке найбільш часто використовується на практиці, метод називають методом обернено-квадратичної дистанції.

Метод оберненої дистанції є гнучким і малоємним з погляду використання обчислювальних ресурсів. Основні недоліки, загалом такі ж, як і у інших детермінованих методів, – відсутність методики обґрунтування можливості або доцільності використання у кожному конкретному випадку вагової функції вигляду (2.2), відсутність об'єктивних критеріїв вибору значення параметра  $r$  (1, 2, 3, 4, ...), хоча воно може суттєво впливати на результати моделювання, і наперед невідома точність просторової інтерполяції. Специфічною особливістю вживання даного методу при великому діапазоні значень досліджуваної змінної і нерівномірному її просторовому розподілі є створення на інтерпольованій поверхні так званих “волових очей” – областей підвищених або знижених значень овальної форми.

*Метод сплайнів, або сплайн-інтерполяція*, ґрунтується на використуванні для інтерполяції в околах даного вузла кусочних поліноміальних функцій, які мають назву «функції сплайнів». Термін "сплайн" походить від англійського spline, що означає гнучку лінійку, за допомогою якої креслярі проводили через задані точки плавні криві. Для двовимірного випадку (на площині) функція сплайна, що математично еквівалентна гнучкій лінійці, є кубічним поліномом (поліномом третього ступеня), який є безперервною функцією і має безперервні першу і другу похідні. Для тривимірного випадку, коли замість лінії повинна бути інтерпольована поверхня, використовуються бікубічні сплайни – полігони третього ступеня двох координат простору. Сплайн-інтерполяція належить до точних методів інтерполяції, при яких інтерпольована лінія (двовимірний випадок) або поверхня (тривимірний випадок) у точках вимірювань збігається із виміряними значеннями.

Таким чином, задача інтерполяції з використанням бікубічних сплайнів полягає в побудові на кожному фрагменті даної території кубічного полінома,

значення якого в точках вимірювань збігаються із виміряними значеннями змінної. Додатковою умовою є вимога узгодження перших і других похідних у граничних точках фрагментів і дві крайові умови (нульова або задана кривизна або нахил). Умови утворюють систему лінійних алгебраїчних рівнянь, розв'язання якої з використанням тих точкових значень змінної, що є на кожному фрагменті досліджуваної території, дозволяє знайти відповідні значення коефіцієнтів полінома.

До достоїнств сплайн-інтерполяції слід віднести високу швидкість обробки обчислювального алгоритму, оскільки сплайн – це кусочно-поліноміальна функція і при інтерполяції одночасно обробляються дані за невеликою кількістю точок вимірювань, що належать до фрагмента, який розглядається в даний момент. Інтерпольована поверхня описує просторову мінливість різного масштабу і в той самий час є гладкою. Остання обставина робить можливим прямий аналіз геометрії і топології поверхні з використанням аналітичних процедур.

Гладкість інтерпольованої поверхні, що є особливістю, внутрішньо властивою сплайн-інтерполяції, в той самий час обумовлює неможливість коректного відображення за допомогою сплайнів різких змін у поверхні–оригіналі, що є одним із недоліків методу. До недоліків також слід віднести високу залежність точності моделювання поверхні від розміщення точок вимірювань (або спостережень); особливо критичне значення має наявність точок на структурних лініях поверхні-оригіналу – вододілах і тальвегах, якщо йдеться про топографічну поверхню. Результат інтерполяції також залежить і від характеру виділення фрагментів. Окрім цього, так само, як і для інших детермінованих методів, немає методики прямих оцінок похибок, пов'язаних із сплайн-інтерполяцією.

Деякою мірою вільними від багатьох спільних для детермінованих методів просторової інтерполяції недоліків є *локально-стохастичні методи*, відомі під загальною назвою «кригінг». Їх характеристика дається в наступному підрозділі.



## 2.3 Локально-стохастичні методи просторової інтерполяції і геостатистичне моделювання

### 2.3.1 Принципи геостатистичного моделювання

У геостатистичному моделюванні передбачається, що властивості точок простору (або комірок растра, якщо йдеться про растрову модель просторових даних) – це просторова реалізація деякої випадкової величини. У більшості випадків приймається, що розподіл цієї випадкової величини підпорядковується нормальному закону розподілу. При цьому в основу просторового аналізу даних і побудови (моделювання) безперервних поверхонь на основі дискретних наборів емпіричних даних з використанням процедур локально-стохастичної інтерполяції, відомих під загальною назвою «кригінг» (або «крайгінг») (на честь південно-африканського гірничого інженера Д.Дж. Кріге (D.G.Krige), в геостатистиці прийнято уявлення про *регіоналізовану змінну*.

Теорія регіоналізованої змінної (Burrough, McDonnel, 1998) припускає, що просторові зміни деякої змінної  $z(x)$ , де  $x$  – узагальнене позначення координат простору  $x, y$ , можуть бути виражені як сума трьох компонент (рисунок 2.3):

- структурної компоненти, яка має постійне значення або тренд (детермінована складова);
- випадкової, але просторово корельованої компоненти, яка є місцевими відхиленнями змінної від тренда, що, власне, і називається «*регіоналізованою змінною*»;
- просторово некорельованого випадкового шуму або залишкової похибки.

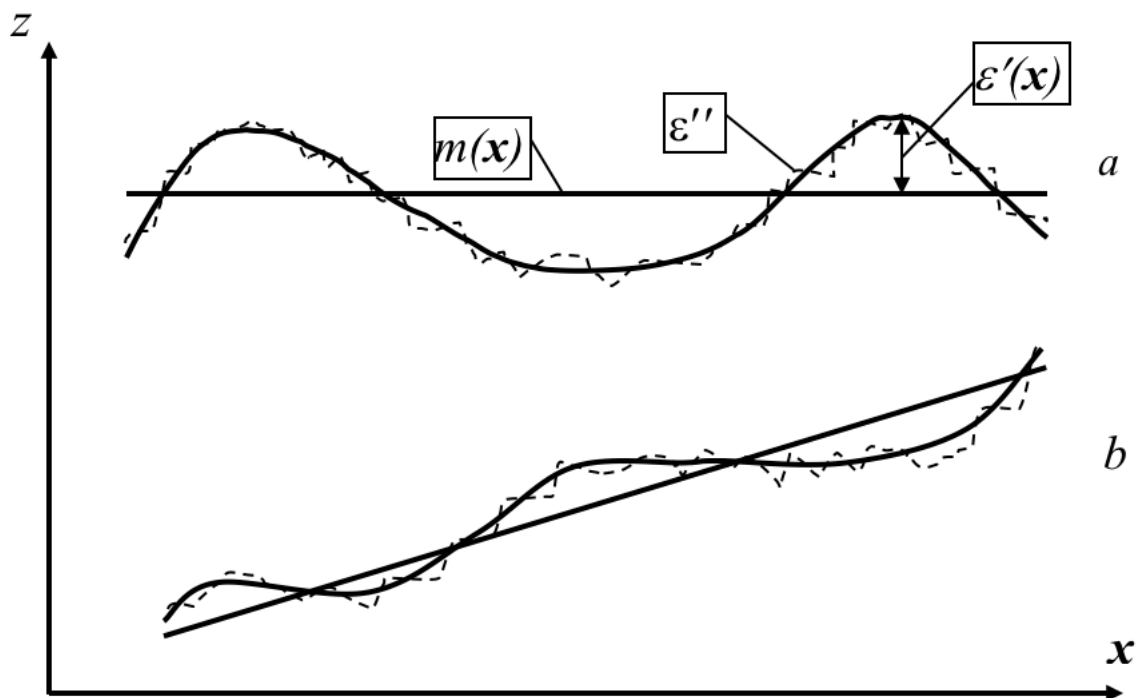


Рисунок 2.3 - Регіоналізована змінна без тренда (з постійним математичним очікуванням) (а) і з лінійним трендом (б)

Тоді значення випадкової змінної  $z$  в точці  $x$  задається виразом:

$$z(x) = m(x) + \varepsilon'(x) + \varepsilon''$$

де  $m(x)$  – детермінована функція, що описує “структурований” компонент  $z$  в  $x$  (тренд);  $\varepsilon'(x)$  – складова, що представляє локальні стохастичні, але просторово корельовані відхилення від  $m(x)$  – *регіоналізована змінна*, і  $\varepsilon''$  – залишок, просторово незалежний гауссівський шум, що має нульове середнє і дисперсію  $\sigma^2$ .

У найпростішому випадку, коли тренд відсутній,  $m(x)$  рівняється середньому значенню в межах обстеженої площі, а середня або очікувана різниця між двома місцеположеннями  $x$  і  $x+h$ , розділеними відстанню  $h$ , буде дорівнювати нулю:

$$E[z(x) - z(x + h)] = 0$$

де  $z(x)$ ,  $z(x + h)$  – значення випадкової змінної  $z$  в точках  $x$  і  $x + h$ ;  $E[\ ]$  – математичне очікування змінної, яка стоїть в квадратних дужках. При цьому дисперсія різниці значень змінної в точках простору, розділених  $h$ , залежить тільки від відстані між цими точками, тобто

$$E[z(x) - z(x + h)]^2 = E[\{\varepsilon'(x) - \varepsilon'(x + h)\}]^2 = 2\gamma(h)$$

де  $\gamma(h)$  – величина, відома як *напівдисперсія* (або *семіваріація*).

Висновки, одержані в припущенні, що тренд відсутній, справедливі і для випадку, коли тренд є, але він виключений з використанням функції, що його описує. У зв'язку з цим перший крок геостатистичного аналізу – знаходження функції для опису *трендової поверхні* ( $m(x) = f(x)$ ). Після того як детермінований ефект врахований, залишкова варіація є гомогенною і різниця між місцеположеннями є тільки функцією відстані між ними.

У тому випадку, якщо сформульовані вище умови щодо структурованого компонента змінної виконуються, напівдисперсія може бути визначена за вибірковими даними за виразом:

$$\gamma(h) = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n \{z(x_i) - z(x_i + h)\}^2 \quad (2.3)$$

де  $n$  – кількість пар точок вимірювань значень змінної  $z$ , розділених відстанню  $h$ .

Графік залежності напівдисперсії (2.3) від  $h$ , побудований з використанням вибіркових даних, в англійській літературі відомий як *експериментальна* або *вибіркова варіограма*, або просто – *варіограма*. У вітчизняній науковій літературі цю залежність називається *структурною функцією*. Експериментальна варіограма – це перший крок на шляху кількісного опису регіоналізованих змінних. Варіограма дає корисну інформацію для інтерполяції, оптимізації мережі вимірювань (або пробовідбору), а також визначення моделі просторового розподілу.

### 2.3.2 Побудова і оптимізація варіограмної моделі

Зазвичай варіограма в прямокутній системі координат з осями  $\gamma(h)$  (ординат) і  $h$  (абсцис) має вигляд кривої, що перетинає вісь ординат на деякій відстані від осі абсцис (рисунок 2.4).

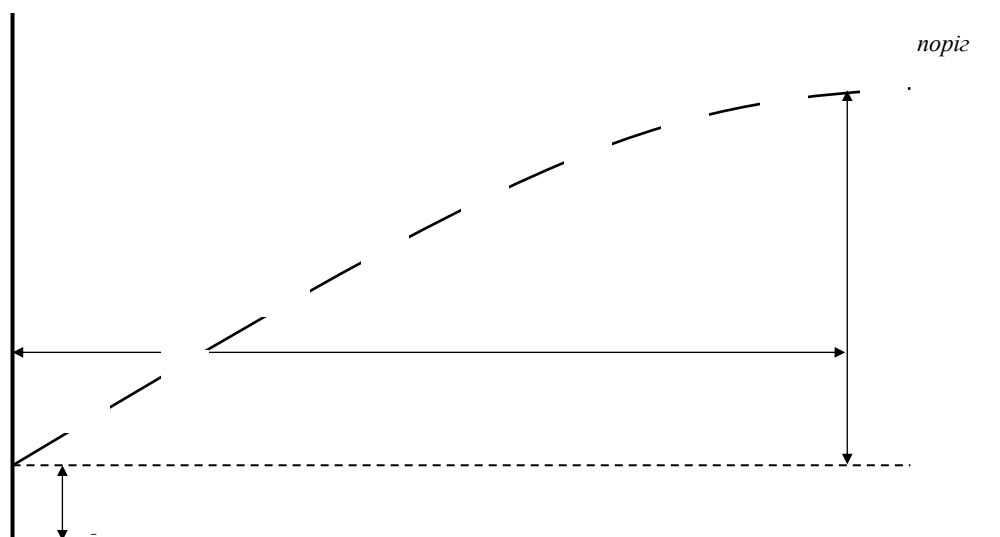


Рисунок 2.4 - Схематизована експериментальна варіограма перехідного типу з позначенням основних параметрів

Позитивне значення  $\gamma(h)$  при  $h=0$  ( $c_0$ ) – це оцінка  $\varepsilon''$  – просторово некорельованого шуму і в англійській літературі позначається як *nugget* (що в перекладі означає «самородок»). Це – залишкова варіація, тобто дисперсія похибок вимірювань, а також тих просторових змін, які мають характерний розмір, набагато менший, ніж крок випробування.

Із збільшенням кроку варіограма збільшується до максимальних значень при деякому значенні  $a$ , яке називають *радіусом кореляції*, *радіусом залучення* або просто – *радіусом* (англійський еквівалент – *range*). При подальшому збільшенні кроку варіограма не збільшується, тобто втрачається залежність різниці значень в двох місцях від відстані між ними. Цю величину “насичення” варіограми називають *porig* (*sill*). Таким чином,  $a$  показує область відстаней, в межах яких існує залежність (кореляція) між значеннями змінної. За межами цієї області залежності між значеннями змінної практично немає.

Форма варіограми абсолютно безумовно свідчить про вигляд просторової

варіації, що має місце в межах даної площі, і може допомогти вирішити, як діяти далі.

Відома достатньо велика кількість варіограмних моделей, які мають різну поширеність на практиці. Найбільш широко застосовуються сферична, експоненціальна і гауссівська моделі.

Коли залишкова дисперсія істотна, але не дуже велика (рисунок 2.5), варіограма описується *сферичною* моделлю:

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \left\{ \frac{3h}{2a} \right\} - \frac{1}{2} \left( \frac{h}{a} \right)^3 \quad \text{для } 0 < h < a \quad (2.4)$$

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \quad \text{для } h > a$$

де  $a$  – радіус;  $h$  – крок;  $c_0$  – залишкова варіація;  $c_1$  – перевищення між пороговим значенням варіограми і залишковою варіацією. Модель (2.4) спочатку була розроблена як модель кристалізації від центрів, але задовільно описує і деякі інші структури. Зокрема, вона добре описує більшість об'єктів з кінцевим інтервалом взаємовпливу вимірювань (спостережень).

Якщо залишкова варіація і поріг виражені виразно, а розмах – приблизно, варіограма краще всього описується *експоненціальною* моделлю:

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \left[ 1 - \exp \left( -\frac{h}{a} \right) \right] \quad (2.5)$$

Незважаючи на явну схожість її графіка зі сферичною, модель (2.5) має декілька істотних особливостей. По-перше, термін "радіус" в ній не зовсім коректний. Ця модель виходить на поріг асимптотично, залишаючи навіть для найдальших проб деякий малий взаємовплив. Разом з тим на відстані радіуса візуально відрізнити її значення від порогу буває складно. По-друге, що важливо, вона задає зовсім іншу поведінку інтерполяційних алгоритмів на малих відстанях, "ослаблюючи" міцність зв'язку в нулі і знижуючи, таким чином, тут достовірність оцінки. Теоретичні варіограмні моделі проілюстровані на рисунку 2.5.

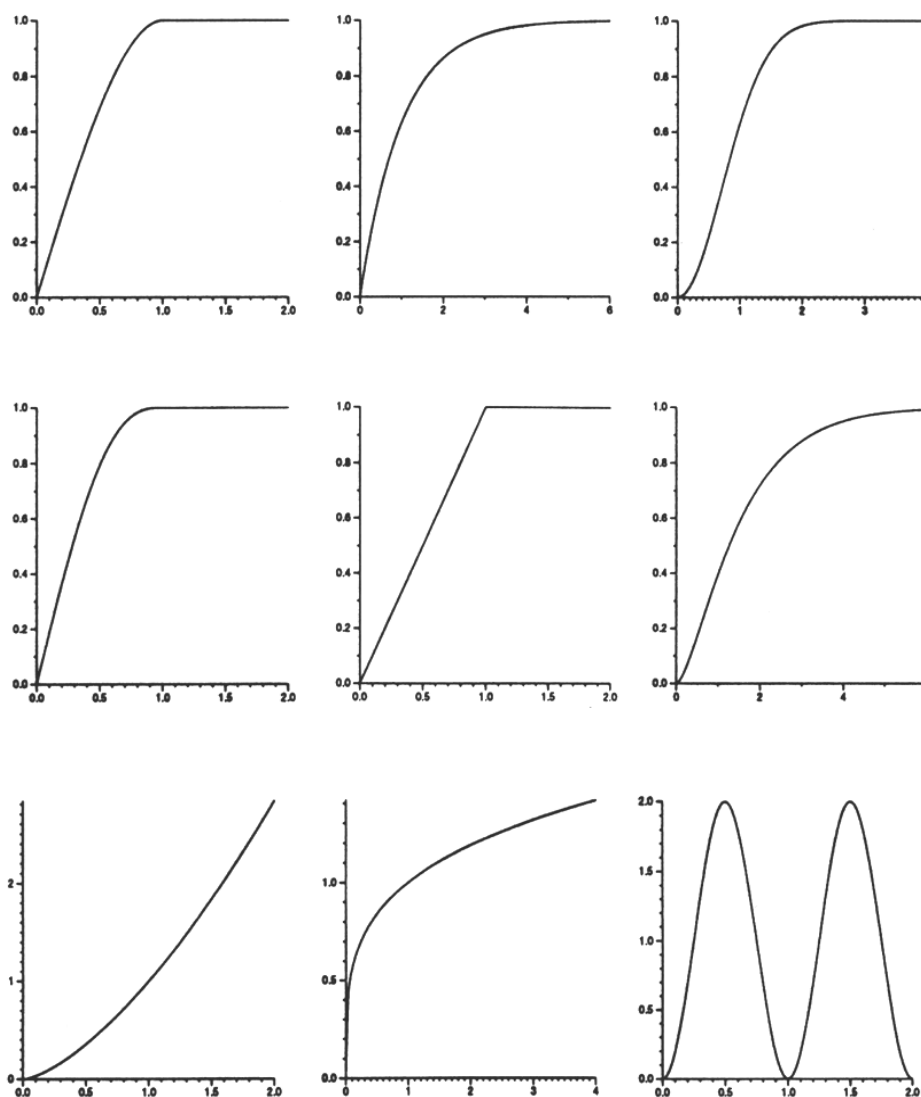


Рисунок 2.5 - Теоретичні варіограмні моделі при  $c_0=0$  і  $c_1=1.0$ : а – сферична; б – експоненціальна; в – гауссівська; г – пентасферична; д – лінійна; доповнена порогом; е – Бесселя; ж – степенева ( $a=1.5$ ); з – степенева ( $a=0.25$ ); і - періодична

Якщо зміни варіограми незначні, а залишкова варіація мала порівняно з просторово залежною випадковою варіацією  $\varepsilon'(x)$ , тоді варіограма найкращим чином може бути описана гауссівською моделлю:

$$\gamma(h) = c_0 + c_1 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{h^2}{a^2}\right) \right] \quad (2.6)$$

Гауссівська модель (2.6) задає дуже високу міцність взаємозв'язку в нулі

(характерну для потенційних полів) і в той самий час має поріг і радіус, хоча на поріг вона, як і експоненціальна, виходить не на значенні радіуса, а асимптотично. Особливості поведінки на малих відстанях дозволяють її використовувати замість процедур нелінійної геостатистики для об'єктів із значущим локальним трендом.

Всі ці моделі відомі як *перехідні варіограми* (інша назва – «*варіограми з порогом*»), тому що структура просторової кореляції міняється із зростанням  $h$ ; неперехідні варіограми не мають порогу в межах досліджуваної території і можуть моделюватися *лінійною* моделлю:

$$\gamma(h) = c_0 + bh \quad (2.7)$$

де  $b$  – тангенс кута нахилу варіограми до осі абсцис. Лінійні варіограми (2.7) характерні для змінних (або процесів), що змінюються при будь-яких масштабах їх розгляду. Прикладом є броунівський рух. У більшості випадків модель цілком задовільно описує топографічні поверхні.

Відомі також і інші варіограмні моделі, зокрема, *логарифмічна*, *степенева*, *періодична*, *Бесселя*. Їх стисла характеристика наведена в таблиці 2.1.

Таблиця 2.1. Варіограмні моделі (при  $c_0=0$  і  $c_1=1.0$ ) (Pebesma, 2001).

Модель	$\gamma(h)$	Діапазон $h$
Логарифмічна	$0$ $\log(h + a)$	$h=0$ $h > 0$
Степенева	$h^a$	$h \geq 0, 0 < a \leq 2$
Періодична	$1 - \cos\left(\frac{2\pi h}{a}\right)$	$h \geq 0$
Бесселя	$1 - \frac{h}{a} K_1\left(\frac{h}{a}\right)$	$h \geq 0$
Пентасферична	$\frac{15h}{8a} - \frac{5}{4}\left(\frac{h}{a}\right)^3 + \frac{3}{8}\left(\frac{h}{a}\right)^5$	$0 \leq h \leq a$

Варіограмні моделі експоненціальна, гауссівська і Бесселя досягають насичення (порогу) асимптотично (при  $h \rightarrow \infty$ ). Ефективна величина *радіуса* – це

відстань, при якій варіограма досягає 95% її максимуму. Для експоненціальної моделі – це  $3a$ , для гауссівської –  $\sqrt{3}a$  і для бesselівської –  $4a$ . Логарифмічна і степенева варіограмні моделі необмежені (безперервно зростають із зростанням  $h$ ) і, таким чином, не підходять для коваріаційного моделювання або простого кригінгу.

Процес побудови оптимальної варіограмної моделі ґрунтується на методі найменших квадратів і достатньо трудомісткий. Сучасні геостатистичні пакети зазвичай містять інтерактивну процедуру побудови варіограмних моделей, при якій всі трудомісткі процедури виконує комп'ютер. Користувач же, виходячи з розміщення точок на емпіричній варіограмі, вибирає найперспективніші теоретичні моделі, запускає процедури визначення їх параметрів, а потім на основі порівняльного аналізу вибирає з них найбільш відповідну (оптимальну) для даного випадку.

Оптимальна варіограмна модель використовується для моделювання безперервних поверхонь на основі даного дискретного набору точок, а також для оцінки точності моделювання в кожній точці простору (або комірці растра).

### 2.3.3 Моделювання поверхонь та їх оцінка

Для моделювання безперервних поверхонь на основі дискретного масиву даних використовується процедура локальної інтерполяції, аналогічна до тієї, що застосовується при інтерполяції методом зваженого ковзного усереднювання, відповідно до якої розрахункове значення змінної  $z$  у деякій точці простору  $x_0$  задається виразом:

$$z(x_0) = \sum_{i=1}^n \lambda_i(zx_i) \quad (2.8)$$

де  $z(x_i)$  – значення змінної  $z$  у  $i$ -х точках простору (комірках растра), отримані на основі вимірювань або спостережень;  $\lambda_i$  – вагові коефіцієнти для цих значень.

Для визначення вагових коефіцієнтів  $\lambda_i$ , що забезпечують мінімум похибки при заданому масиві просторово-координованих даних, використовується



оптимізована варіограмна модель. Процедура визначення вагових коефіцієнтів лінійної моделі (2.8) базується на теорії випадкових процесів, виходячи з якої дисперсія оцінки змінної  $z(x)$  може бути записана як функція значень варіограми між всіма парами проб (вимірювань), а також між всіма пробами (вимірюваннями) і оцінюваною точкою ( $x_0$ ), і значень вагових коефіцієнтів:

$$\sigma^2 = \frac{2}{N} \sum_{i=1}^N a_i \gamma \vec{T} - \vec{X}_i - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N a_i a_j \gamma \vec{X}_i - \vec{X}_j - \gamma(0) \quad (2.9)$$

де  $\sigma_e^2$  – дисперсія відхилень оціночного (прогнозного) значення змінної в точці оцінювання (прогнозу) від істинного, тобто похибка оцінювання (прогнозу), або «кригінговська дисперсія»;  $\gamma|x_0 - x_i|$  і  $\gamma|x_i - x_j|$  – варіограми змінної  $z$  між точкою оцінювання  $x_0$  і точками вимірювань  $x_i$ , і між точками вимірювань  $x_i$  і  $x_j$ , відповідно визначувані з використанням оптимізованої варіограми;  $N$  – кількість точок вимірювань в околах точки  $x_0$  радіусом  $a$ ;  $\gamma(0)$  – залишкова дисперсія варіограмної моделі, тобто  $c_0$  (nugget).

Задача оптимальної інтерполяції, таким чином, полягає в знаходженні такого набору вагових коефіцієнтів  $\lambda_i$ , який би забезпечував максимальну точність оцінки, тобто мінімальну дисперсію  $\sigma_e$ . Отже, постає задача мінімізації функції дисперсії, розв'язком якої є ті вагові коефіцієнти, які цей мінімум забезпечують.

Відомо, що будь-який екстремум функції багатьох змінних супроводжується рівністю нулю всіх часткових похідних у точці екстремуму. В нашому випадку всі часткові похідні є лінійними функціями, і пошук екстремуму зводиться до розв'язання системи лінійних рівнянь. Позитивна напіввизначеність функції варіограми забезпечує, що розв'язання системи існуватиме, буде єдиним і відповідатиме саме мінімуму дисперсії, а не максимуму.

Для забезпечення однієї з головних вимог задачі оцінювання – вимоги незміщеності оцінки – в систему (2.9) необхідно ввести додаткове рівняння, що

визначає умову рівності одиниці суми всіх вагових коефіцієнтів, або, що те ж саме, додати відповідний доданок у рівняння функції, що мінімізується:

$$F = \sigma^2 + 2\mu \left( \sum_i a_i - 1 \right)$$

де  $\mu$  – множник Лагранжа.

Обчислюючи і прирівнюючи до нуля часткові похідні, одержуємо систему лінійних рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial a_i} = 2 \sum_j a_j \gamma_{x_i x_j} - 2\gamma_{Tx_i} + 2\mu = 0, i = 1, \dots, N, \\ \frac{\partial F}{\partial \mu} = \sum_i a_i - 1 = 0. \end{cases} \quad (2.10)$$

де  $\gamma_{AB}$  є середнє значення варіограми між точками  $A$  і  $B$ .

Розв'язком системи (2.10) є і шукані вагові коефіцієнти, і значення множника Лагранжа, які дозволяють окрім, власне оцінки змінної  $z$ , у будь-якій точці простору або комірці растра визначити значення кригінгової дисперсії.

Для знаходження значень змінної в тих точках простору, де вимірювання не проводилися, використовується модель (2.7) зі знайденими ваговими коефіцієнтами. При використанні растрової моделі просторових даних оцінка (прогноз) проводиться для всіх комірок растра з невідомими значеннями змінної. У комірках, де значення змінної відомі, ці значення беруться як оціночні. В результаті будується (моделюється) безперервна поверхня  $z(\mathbf{x})$ , що задовольняє сформульовані вище вимоги – мінімуму похибки і незміщеності.

Дисперсія відхилень оцінного (прогнозного) значення змінної від істинного, тобто похибка оцінювання (прогнозу), для кожної точки простору (комірки растра) обчислюється за формулою (2.9).

Описаний метод просторової інтерполяції відомий як звичайний лінійний (або ординарний) точковий кригінг.

### 2.3.4 Різновиди локально-стохастичної інтерполяції

У тому випадку, якщо при аналізі використовуються усереднені за деякою площею (зазвичай за ділянками правильної квадратної або прямокутної форми – «блоками»), то процедура просторового моделювання має назву «*блоковий кригінг*». У цьому випадку побудована в результаті поверхня має більш згладжений вигляд порівняно з точковим кригінгом.

Якщо в межах даної території виділяються значні за площею ділянки неправильної форми (страти), в межах яких статистичні параметри масивів емпіричних даних розрізняються, доцільно використовувати «*стратифікований кригінг*», при якому моделювання просторового розподілу змінної для кожної частини території виконується за варіограмними моделями, побудованими на основі аналізу масивів емпіричних даних, що належать до відповідних частин території.

Відомі також *простий кригінг*, *індикаторний кригінг*, *ко-кригінг*, *ординарний кригінг з анізотропією*, *нелінійний кригінг* і деякі інші різновиди локально-стохастичної інтерполяції, хоча і менш поширені порівняно з описаними вище, проте такі, що мають свої сфери використання.

У зв'язку з можливістю, а в конкретних випадках і доцільністю застосування різних варіантів просторової локально-стохастичної інтерполяції важливим етапом геостатистичного моделювання є аналіз наявних просторових даних. Аналіз, по-перше, повинен передбачати перевірку даних на нормальність, оскільки звичайний, простий і універсальний різновиди кригінга припускають нормальний розподіл даних. У випадку, якщо вихідний просторовий розподіл емпіричних даних не підпорядковується нормальному закону розподілу, доцільно спробувати привести його до нормального закону шляхом перетворення (логарифмічного, степеневого та ін.), заздалегідь виключивши тренд, якщо такий є.

Виявлення тренда також є обов'язковою складовою частиною аналізу емпіричних даних. Після виключення тренда з наявних даних з використанням його аналітичної апроксимації і позитивного результату перевірки на нормальність до

останніх може бути застосована процедура звичайного кригінга. У разі застосування процедури універсального кригінга виключення тренда може не проводитися, проте і в цьому випадку аналітичне рівняння тренда повинне бути задано.

У модулях геостатистичного аналізу і моделювання сучасних ГІС-пакетів геостатистичне моделювання виконується в інтерактивному режимі на основі спеціальних Майстрів, що реалізують всі етапи геостатистичного моделювання з використанням обчислювальних ресурсів сучасних комп'ютерів. Основними етапами, як правило, є:

- представлення (візуалізація) набору емпіричних даних;
- дослідження даних (визначення статистичних параметрів, перевірка на нормальність, виявлення тренда);
- побудова варіограмної моделі;
- побудова (моделювання) поверхні;
- оцінка точності моделювання.

Таким чином, у модулях геостатистичного аналізу і моделювання сучасних інструментальних ГІС з розвинутими аналітичними можливостями передбачена реалізація всіх описаних вище процедур. Відзначимо тільки, що у різних ГІС-пакетах передбачені різні можливості щодо доступу до видів варіограмних моделей і вони мають у своєму розпорядженні різний перелік реалізованих різновидів кригінг-інтерполяції.

## **2.4 Вибір методу інтерполяції**

Як впливає з представлення методів просторової інтерполяції, кожний з них має свої достоїнства і недоліки, що мають бути враховані при виборі того чи іншого методу при розв'язанні конкретних задач (рисунки 2.6). Але вибір методу інтерполяції наявних даних залежить також від кількості вихідних точок даних і рівномірності їх розподілу в області інтерполяції. Виробники спеціалізованого програмного забезпечення для просторової інтерполяції – широко розповсюдженого пакета наукової графіки Surfer компанії Golden Software – розробили ряд

рекомендацій щодо вибору відповідного методу просторової інтерполяції.

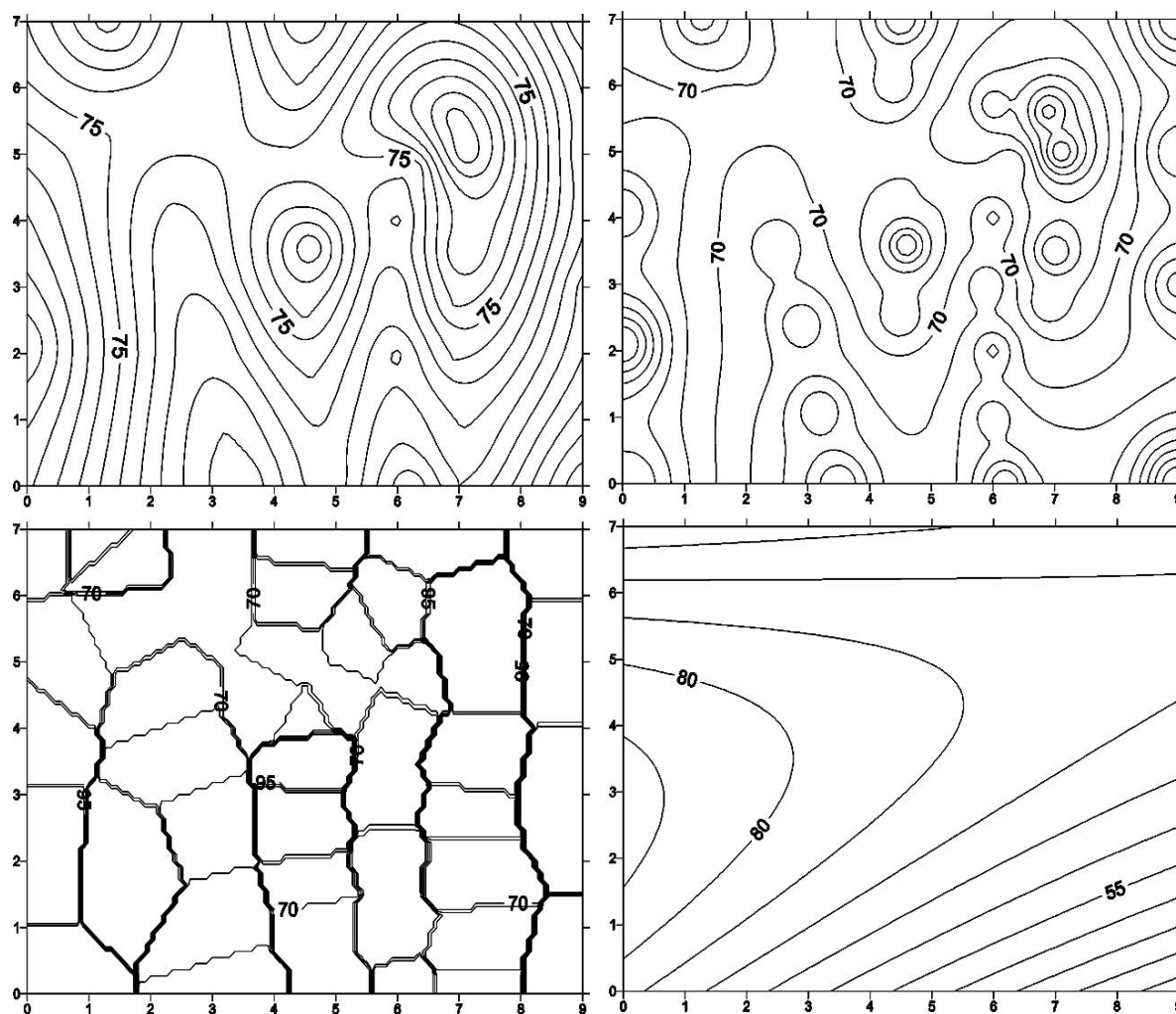


Рисунок 2.6 - Різні варіанти інтерполяції одного набору базових точок:

а) метод кригінга; б) метод обернено-квадратичної дистанції; в) метод найближчого сусідства (полігони Тиссена – Вороного); г) поліноміальний тренд

Набір, що містить близько десяти точок, дозволить визначити не більш ніж загальні закономірності розподілу досліджуваного параметра. У цьому випадку рекомендуються методи кригінга і радіальних базисних функцій. Останні належать до нейро-мережного моделювання, яке тільки починає застосовуватися у просторовій інтерполяції у середовищі ГІС. Для побудови трендових поверхонь можна використовувати поліноміальну регресію.

При наборі менше 250 точок рекомендується кригінг із лінійною варіограмною моделлю.

Набір з 250–1000 точок з оптимальною швидкістю обробляють тріангуляція з лінійною інтерполяцією, кригінг і радіальні базисні функції.

Коли набір налічує більше 1000 точок, швидка оцінка даних може бути зроблена з використанням методів мінімальної кривизни і тріангуляції з лінійною інтерполяцією. Точно, але відносно повільно працюють методи кригінга і радіальних базисних функцій.

Відзначимо, що дуже великі набори даних не дають істотних розходжень у швидкості інтерполяції різними методами. Вибір методу залежить від вимог користувача і ресурсів системи.

Відзначимо також, що навіть найточніша процедура інтерполяції дає досить умовну картину реального розподілу характеристики, що картографується, в просторі. Одним з методів контролю правильності інтерпольованих карт є обчислення й порівняння різниці розрахованих значень зі значеннями вихідних даних. Отримана вибірка значень підлягає статистичній обробці, при перевищенні визначеного дослідником рівня в параметри інтерполяції вносяться необхідні зміни. Інтерпольована карта може коректуватися з використанням спеціальних редакторів, що дозволяють вручну змінювати значення кожного вузла сітки.

Готова інтерпольована карта представляє поверхню якого-небудь просторового явища (рельєфу суші чи дна, атмосферного тиску, вологості, температури, концентрації різних речовин у різних середовищах і т.ін.). Карти поверхонь надалі використовуються як для самостійного аналізу, так і для накладення на них плоских цифрових карт інших взаємозалежних характеристик. Підтримка роботи з поверхнями (3D-картами) входить у функціональний набір багатьох сучасних програмних ГІС-пакетів.

## 2.5 Загальний метод побудови рівнянь поверхонь

### 2.5.1 Загальні відомості

Задачі побудови неявних рівнянь поверхонь та кривих знаходять широке застосування на практиці. Побудова рівнянь поверхонь в неявній формі із можливістю вибору параметрів моделі поверхні дозволяє отримати математичні моделі поверхонь із заданими властивостями. Наприклад, побудова математичних моделей аеродинамічних поверхонь із урахуванням не тільки геометричних властивостей, але й фізичних властивостей поверхонь, таких як міцність і т.п. Тому доцільним буде вирішення цих питань із використанням математичної моделі поверхні методом вибору її параметрів за допомогою деяких критеріїв.

Одним із найбільш складних етапів при побудові математичних моделей кривих та поверхонь в неявній формі є забезпечення умови неперервності похідних заданих порядків. Тому актуальною являється задача побудови і дослідження математичних моделей ліній та поверхонь в неявній формі, які задовольняють даним вимогам.

Неявна форма ліній має наступний вигляд:

$$F(x, y) = 0, (x, y) \in D_{xy}$$

та неявна форма поверхні:

$$F(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in D_{xyz}$$

Серед аналітичних методів опису ліній та поверхонь в неявній формі найбільш загальним є метод R-функцій В.Л.Рвачова.

Цей метод за допомогою відомих рівнянь(3), вказаних частин ліній та мулевої функції  $F(u_1, u_2, \dots, u_N, \wedge, \vee, \neg)$ , яка описує область, що обмежена даною кривою за допомогою булевих операцій кон'юнкції  $\wedge$ , диз'юнкції  $\vee$ , заперечення  $\neg$  та R-

функцій  $u \wedge_{\alpha} v$ ,  $u \vee_{\alpha} v$ ,  $\neg u$ ,  $0 < \alpha \leq 1$ , дає можливість отримати необхідне рівняння лінії у вигляді  $F(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \wedge_{\alpha}, \vee_{\alpha}, \neg) = 0$ .

Недолік цього методу полягає в тому, що отримана таким чином функція  $F(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \wedge_{\alpha}, \vee_{\alpha}, \neg) = F(x, y)$  в кутових точках є недиференційованою.

Аналогічна ситуація виникає при побудові неявних рівнянь поверхонь.

Метод R-функцій дозволяє за допомогою відомих рівнянь  $w_i(x, y, z) = 0$ ,  $i = 1, N$ , частин  $\Gamma_k$ ,  $k = 1, N$ , поверхні  $\Gamma$  і булевої функції  $F(u_1, u_2, \dots, u_N, \wedge, \vee, \neg)$ , яка описує область тіла з даною поверхнею  $\Gamma$ , за допомогою булевих операцій кон'юнкції, диз'юнкції, заперечення  $\wedge, \vee, \neg$  та R-функцій  $u \wedge_{\alpha} v$ ,  $u \vee_{\alpha} v$ ,  $\neg u$  отримати рівняння поверхні  $\Gamma$  у вигляді  $F(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \wedge_{\alpha}, \vee_{\alpha}, \neg) = 0$ .

Недолік цього методу полягає в тому, що отримана  $F(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N, \wedge_{\alpha}, \vee_{\alpha}, \neg)$  на ребрах поверхні та в її кутових точках являється недиференційованою. Це означає, що важливим при використанні таких функцій в задачах являється умова, щоб наближена функція мала неперервні похідні 1-го, 2-го, 3-го порядків та вище.

Наведені вище недоліки можна обійти за допомогою інтерлінації та інтерфлетації функцій [24-26]. При цьому математична модель ліній на поверхнях зберігатиме неперервність похідних до заданого порядку незалежно від вибору достатньої кількості параметрів в формулі інтерлінації та інтерфлетації.

Інтерлінацією функції  $f(x, y)$  називається відновлення (можливо, наближене) функції  $f(x, y)$  у точках між лініями  $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0$ ,  $k = \overline{1, m}$  за допомогою її слідів  $f_k|_{\Gamma_k} = f|_{\Gamma_k}$ ,  $k = \overline{1, m}$  на цих лініях.

Слідом функції  $u = f(x, y)$  на лінії  $\Gamma_k : \omega_k(x, y) = 0$  будемо називати функцію однієї змінної ( $x$ , або  $y$ , або параметра  $t$ )  $f_k(x)$ , або  $f_k(y)$ , або  $f_k(t) = f(x_k(t), y_k(t))$ , яка у кожній точці цієї лінії  $\Gamma_k$  приймає такі ж значення, як і функція  $u = f(x, y)$ :  $f|_{\Gamma_k} = f_k|_{\Gamma_k}$ ,  $k = \overline{1, m}$ .

Потрібно побудувати рівняння кривої  $\Gamma : f(x, y) = 0$  в неявній формі  $F_{ap}(x, y) = 0$  на основі використання інтерлінації невідомої функції двох змінних  $f(x, y)$ . При цьому функція  $F_{ap}(x, y) = 0$  має найменше середньоквадратичне



відхилення від нормальної функції  $F_n(x, y) = \min_{(\zeta, \eta) \in \Gamma} \sqrt{(x - \zeta)^2 + (y - \eta)^2}$  кривої  $\Gamma$  і належить заданому класу  $C^r(D)$ ,  $r = 0, 1 \dots$  Критерій вибору параметрів, які входять в  $F_{ap}(x, y)$ , може бути іншим. Наприклад, можна мінімізувати середньоквадратичне відхилення  $F_{ap}(x, y)$  від функції  $F(x, y)$  побудованої за допомогою  $R$ -функцій. Для побудови математичної моделі поверхні трьохвимірного тіла в неявній формі зі збереженням потрібного класу диференціювання використовується сплайн-інтерполяція функцій трьох змінних з мінімізацією відхилення шуканої функції від заданої. Вхідними даними для опису являються рівняння частин поверхонь, які належать досліджуваній поверхні.

В результаті отримаємо математичну модель поверхні у вигляді  $F_{ap}(x, y, z) = 0$ , яка являється найкращим середньоквадратичним приближенням до функції  $f(x, y, z) \in C(G)$ , яка побудована за допомогою  $R$ -функцій.

### 2.5.2 Побудова неявних рівнянь функцій

Будемо вважати, що  $D \subset R^2$ - область на площині, границя якої  $\Gamma$  являється об'єднанням дуг відомих кривих. Для спрощення припустимо, що область  $D$  повністю розміщена в прямокутнику  $[a, b] \times [c, d]$ . Розіб'ємо  $D$  на під області прямими:

$$x = x_k, \quad k = \overline{0, M_1}, \quad y = y_l, \quad l = \overline{0, M_2},$$

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{M_1} = b; \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_{M_2} = d.$$

Припустимо, що в результаті  $D$  розіб'ється на прямокутники

$$R_{i,j} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D$$

Або чотирикутники

$$R_{i,j}^{(1)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}(x)] \subset D, \quad R_{i,j}^{(2)} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j(x), y_{j+1}] \subset D, \\ R_{i,j}^{(3)} = [x_i(y), x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D, \quad R_{i,j}^{(4)} = [x_i, x_{i+1}(y)] \times [y_j, y_{j+1}] \subset D,$$

В яких три прямі паралельні осям координат, а одна – криволінійна сторона, яка являється частиною границі  $\Gamma$  області  $D$ . Крім того, під області на які розбивається область  $D$ , можуть бути трикутниками:

$$T_{i,j}^{(1)} = \{(x, y) | y \geq y_j, y \leq \eta_{j+1}(x), \frac{d\eta_{j+1}(x)}{dx} < 0, x_i \leq x \leq x_{i+1}\}, \\ T_{i,j}^{(2)} = \{(x, y) | y \geq y_j, y \leq \eta_{j-1}(x), \frac{d\eta_{j-1}(x)}{dx} > 0, x_i \leq x \leq x_{i+1}\}, \\ T_{i,j}^{(3)} = \{(x, y) | y \geq y_j, y \leq \eta_{j+1}(x), \frac{d\eta_{j+1}(x)}{dx} > 0, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \\ T_{i,j}^{(4)} = \{(x, y) | y \leq y_j, y \geq \eta_{j-1}(x), \frac{d\eta_{j-1}(x)}{dx} < 0, x_{i-1} \leq x \leq x_i\},$$

в яких одна із сторін являється криволінійною частиною границі  $\Gamma$ .

Далі буде наведений загальний алгоритм побудови оператора  $O_D f(x, y) \in C^r(\bar{D})$ , який інтерлінує функцію  $f(x, y)$  на лініях ректангуляції  $x = x_k, k = \overline{1, M}, y = y_l, l = \overline{1, N}$  і задовольняє умові  $O_D f(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$ .

**Крок 1.** Припустимо, що функції однієї змінної  $\psi_{i,s}(y), \psi_{j,p}(x), i \in \overline{0, M_1}, j \in \overline{0, M_2}, s, p \in \overline{0, r}$  являються слідами невідомої функції  $f(x, y)$  та її часткових похідних на лініях  $x = x_i, i = \overline{1, M}$  і  $y = y_j, j = \overline{1, N}$  відповідно і входять в оператори інтерлінації  $OR_{i,j} f(x, y)$  для функції  $f(x, y)$  на прямокутниках і в оператори інтерлінації  $OT_{i,j} f(x, y)$  для функції  $f(x, y)$  на трикутниках. В результаті отримаємо функцію  $O_D f(x, y)$ , яка буде точно рівною нулю на межі  $\Gamma$  області  $D$ . Сліди невідомої функції  $O_D f(x, y)$  та її похідні  $\varphi_{i,s}(y), \psi_{j,p}(x)$  у вузлових точках повинні задовольняти умовам

$$\exists f_{i,j,s,p} \in R: \varphi_{i,s}^{(p)}(y_j) = \psi_{j,p}^{(s)}(x_i) = f_{i,j,s,p}, i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}; s, p = \overline{0, r}, \quad (2.11)$$

$$\varphi_{i,s}(y) = \frac{\partial^s O_D f}{\partial x^s}(x_i, y), i = \overline{1, M},$$

$$\psi_{j,p}(x) = \frac{\partial^p O_D f}{\partial y^p}(x, y_j), j = \overline{1, N}; s, p = \overline{0, r}$$

**Крок 2.** Покладемо

$$O_D f(x, y) = O_D f(x, y, \{f_{i,j,s,p}\}) = \begin{cases} OR_{i,j} f(x, y), (x, y) \in \Pi_{i,j}, \\ OT_{i,j} f(x, y), (x, y) \in T_{i,j}, \\ 0, (x, y) \in \Gamma. \end{cases}$$

**Крок 3.** Підставимо в формулу  $O_D f(x, y)$  нулі замість слідів функції  $f(x, y)$  в точках границі  $(x, y) \in \Gamma$ .

**Крок 4.** Невідомі функції  $\varphi_{i,s}(y), \psi_{j,p}(x), i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}, 0 \leq s, p \leq n$  заміняємо інтерполяційними поліномами або сплайнами  $s2_{i,s}(y), s1_{j,p}(x), i = \overline{1, M}, j = \overline{1, N}, 0 \leq s, p \leq r$  відповідного степеня зі забезпеченням виконання умов (2.11), а також умови

$$O_D f(x, y) \in C^r(D), r \geq 1,$$

I умови

$$O_D f(x, y) = 0, (x, y) \in \Gamma$$

Та вибираємо невідомі постійні  $\{f_{i,j,s,p}\}$  із умови мінімуму функціоналу

$$J(f) = \iint_D (\omega_\Gamma(x, y) - O_D(x, y, \{f_{i,j,s,p}\}))^2 dx dy \rightarrow \min_{f_{i,j,s,p}},$$

Де  $\omega_\Gamma(x, y) = 0$  - нормальне рівняння кривої  $\Gamma$ , або рівняння кривої  $\Gamma$ , побудоване за допомогою  $R$ -функцій.

### 2.5.3 Побудова неявних рівнянь поверхні

Для побудови неявних рівнянь поверхонь використаємо метод точного задоволення граничним умовам на границях трьохвимірних областей форми, обмежених частинами відомих поверхонь, який представлений в роботах О.М. Литвина та Л.І. Гулика.

Опишемо алгоритм побудови функції  $O_G(x, y, z) \in C^r(\bar{G})$ , яка входить в рівняння  $O_G(x, y, z) = 0$  – границі  $\partial G$  трьохвимірної області  $G \subset R^3$ , яка обмежена частинами відомих поверхонь.

Будемо вважати, що

$$G \subset [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times [a_3, b_3]$$

#### Крок 1.

Розіб'ємо область  $G$  на підобласті площинами  $x = x_i, i = \overline{0, m_1}; y = y_j, j = \overline{0, m_2}; z = z_k, k = \overline{0, m_3}$ , паралельними координатним

$$a_1 = x_0 < x_1 < \dots < x_{m_1} = b_1; \quad a_2 = y_0 < y_1 < \dots < y_{m_2} = b_2; \\ a_3 = z_0 < z_1 < \dots < z_{m_3} = b_3 .$$

Дослідимо підобласті наступних типів:

- паралелепіпеди

$$\prod_{ijk} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}]$$

- паралелепіпеди

$$\widetilde{\prod_{ijk}} = [x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}] \times [z_k, z_{k+1}(x, y)]$$

з однією криволінійною гранню, яка являється частиною границі  $\partial G$  області  $G$ ; таких паралелепіпедів для кожної точки  $A_{i,j,k}(x_i, y_j, z_k)$  може бути шість (при певному розміщенні криволінійної грані).

- піраміди (симплекси)  $T_{ijk}$  з однією криволінійною гранню, яка являється частиною границі  $\partial G$  області  $G$ . Таких пірамід для кожної приграничної точки  $A_{i,j,k}$  може бути вісім (при певному розміщенні криволінійної грані), наприклад:

$$T_{i,j,k}^{(1)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0, z_k \leq z \leq z_{k+1}(x, y)\},$$

$$T_{i,j,k}^{(2)} = \{(x, y) \mid x_i \leq x \leq x_{i+1}, y_j \leq y \leq \eta_{j+1}(x), \eta'_{j+1}(x) < 0, z_k(x, y) \leq z \leq z_{k+1}\};$$

- циліндрична область  $C_{i,j,k}$  бокова поверхня якої складається з двох граней: перпендикулярних площин, паралельних відповідним двом координатним площинам, та одній криволінійній грані, яка являється частиною границі. Дві основи задаються площинами, паралельними до третьої координатної площини. Таких циліндрів для кожної прикордонної точки  $A_{i,j,k}$  може бути вісім і відрізняються вони розміщенням криволінійної грані. Наприклад

$$C_{i,j,k}^{(1)} = \{(x, y, z): x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j \leq y \leq y_{j+1}(x), y_{j+1}(x_i) = y_{j+1}, \\ y_{j+1}(x_{i+1}) = y_{j+1}; z_k \leq z \leq z_{k+1}\};$$

$$C_{i,j,k}^{(2)} = \{(x, y, z): x_i \leq x \leq x_{i+1}; y_j(x) \leq y \leq y_{j+1}, \\ y_j(x_i) = y_j, y_j(x_{i+1}) = y_j, z_k \leq z \leq z_{k+1}\}.$$

Припустимо, що  $u(x, y, z) \in C^{r,r,r}(\bar{G})$  - деяка невідома функція та  $u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \partial G, \text{gradu}(x, y, z) \neq 0, (x, y, z) \in \partial G$ .

Нехай

$$\begin{aligned} u_{i,s}(y, z) &= u^{(s,0,0)}(x_i, y, z), i = \overline{0, M_1}, 0 \leq s \leq r \\ v_{j,p}(x, z) &= u^{(0,p,0)}(x, y_j, z), j = \overline{0, M_2}, 0 \leq p \leq r \\ w_{k,q}(x, y) &= u^{(0,0,q)}(x, y, z_k), k = \overline{0, M_3}, 0 \leq q \leq r \end{aligned}$$

сліди функції на площинах  $x = x_i$ ,  $y = y_j$ ,  $z = z_k$  відповідно. Ці сліди(невідомі) повинні задовольняти в точках перетину трьох площин  $(x_i, y_j, z_k)$  або на лініях перетину двох із вказаних площин умовам С.М. Нікольського. Ці умови необхідні та достатні для того, щоб написані вище сліди забезпечували включення  $u(x, y, z) \in C^{r,r,r}(\bar{G})$ .

## Крок 2.

Будуємо інтерфлетанти чотирьох типів:

$$\begin{aligned} O\Pi_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) &\in \Pi_{ijk} \\ \frac{\partial^p}{\partial t^p} O\Pi_{ijk}(x, y, z) &= \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z), (x, y, z) \in \partial\Pi_{ijk}, t \in \{x, y, z\} \\ O\tilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) &\in \tilde{\Pi}_{ijk} \\ \frac{\partial^p}{\partial t^p} O\tilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z) &= \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z), (x, y, z) \in \partial\tilde{\Pi}_{ijk}, t \in \{x, y, z\} \\ OT_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) &\in T_{ijk} \\ \frac{\partial^p}{\partial t^p} OT_{ijk}(x, y, z) &= \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z), (x, y, z) \in \partial T_{ijk}, t \in \{x, y, z\} \\ OC(x, y, z), (x, y, z) &\in C_{ijk} \\ \frac{\partial^p}{\partial t^p} OC_{ijk}(x, y, z) &= \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z), (x, y, z) \in \partial C_{ijk}, t \in \{x, y, z\} \\ 0 \leq p &\leq r \end{aligned}$$

### Крок 3.

Будуємо оператор  $Ou$  у вигляді

$$O_G u(x, y, z) = \begin{cases} O\Pi_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) \in \Pi_{ijk}, \\ O\tilde{\Pi}_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) \in \tilde{\Pi}_{ijk}, \\ OT_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) \in T_{ijk}, \\ OC_{ijk}(x, y, z), (x, y, z) \in C_{ijk}. \end{cases}$$

Для кожної функції  $u(x, y, z) \in C^{r,r,r}(\bar{G})$ ,  $r = 0, 1, \dots$ , оператор  $Ou(x, y, z)$  має властивості

$$Ou(x, y, z) \in C^{r,r,r}(\bar{G}) \quad \forall u(x, y, z) \in C^{r,r,r}(\bar{G}),$$

$$Ou(x, y, z) = u(x, y, z), \quad (x, y, z) \in \partial G,$$

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p} Ou(x, y, z) = \frac{\partial^p}{\partial t^p} u(x, y, z), \quad (x, y, z) \in GXYZ, \quad t \in \{x, y, z\}, \quad p = \overline{0, r},$$

$$GXYZ = \{(x, y, z): x = x_i, i = \overline{0, M_1}; y = y_j, j = \overline{0, M_2}; z = z_k, k = \overline{0, M_3}\}.$$

Таким чином, оператори  $Ou(x, y, z)$  та їх незмішані похідні до порядку  $r$  співпадають із функцією  $u(x, y, z)$  та її незмішаними похідними до порядку  $r$  на площинах  $x = x_i, i = 0 \dots M_1; y = y_j, j = 0 \dots M_2; z = z_k, k = 0 \dots M_3$ ; та на границі  $\partial G$  трьохвимірної області  $G$ . Якщо будувати рівняння поверхні  $\partial G$  у вигляді  $O_G f(x, y, z) = 0$ , то в формулі  $O_G f(x, y, z)$  сліди функції  $O_G f(x, y, z)$  на границі  $\partial G$  потрібно прирівняти до нуля. В результаті отримаємо формулу  $O_G u(x, y, z)$ , яка точно задовольнить умові  $O_G u(x, y, z) = 0, (x, y, z) \in \partial G$  незалежно від вибору слідів, які повинні задовольняти умовам

$$\begin{aligned}
u_{i,s}(y, z) &= \frac{\partial^p f}{\partial x^p} \Big|_{x=x_i}, \quad v_{j,p}(x, z) = \frac{\partial^q f}{\partial y^q} \Big|_{y=y_j}, \quad w_{k,q}(x, y) = \frac{\partial^s f}{\partial z^s} \Big|_{z=z_k}, \\
\frac{\partial^p u_{i,s}(y, z)}{\partial y^p} \Big|_{y=y_j} &= \frac{\partial^s v_{j,p}(x, z)}{\partial x^s} \Big|_{x=x_i}, \quad \frac{\partial^q u_{i,s}(y, z)}{\partial z^q} \Big|_{z=z_k} = \frac{\partial^s w_{k,q}(x, y)}{\partial x^s} \Big|_{x=x_i}, \\
\frac{\partial^q v_{j,p}(x, z)}{\partial z^q} \Big|_{z=z_k} &= \frac{\partial^p w_{k,q}(x, y)}{\partial y^p} \Big|_{y=y_j}, \\
\frac{\partial^{q+s} u_{i,s}(y, z)}{\partial y^q \partial z^s} \Big|_{y=y_j, z=z_k} &= \frac{\partial^{p+s} v_{j,p}(x, z)}{\partial x^p \partial z^s} \Big|_{x=x_i, z=z_k}, \\
0 \leq s, p, q &\leq r;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_{i,s}(y, z) &= 0, \quad ((x_i, y, z) \in \partial G); \quad v_{j,p}(x, z) = 0, \quad ((x, y_j, z) \in \partial G); \\
w_{k,q}(x, y) &= 0, \quad ((x, y, z_k) \in \partial G).
\end{aligned}$$

Сліди  $u_{i,s}$ ,  $v_{j,p}$ ,  $w_{k,q}$ , являються невідомими. Їх вибір може підкорятися деякому критерію. Будемо вимагати, щоб вибір слідів задовольняв умові

$$\iiint_G (\omega(x, y, z) - O_G u(x, y, z))^2 dx dy dz \rightarrow \min_{u_{i,s}, v_{j,p}, w_{k,q}},$$

Де  $w(x, y, z) = 0$  - нормальне рівняння границі області  $G$ , або рівняння границі  $\partial G$  області  $G$ , побудоване за допомогою  $R$ -функцій.

#### 2.5.4 Приклад

Застосуємо розглянуту вище теорію для побудови функцій  $f(x, y, z)$ , яка в точках границі квадрату  $[x_0, x_1] \times [y_0, y_1]$  рівна нулю і являється диференційованою у всіх точках функцією двох змінних. Функція являється середньоквадратичним наближенням до функції  $w(x, y)$ , при цьому  $w(x, y) = 0$  - рівняння границі квадрату, побудованої за допомогою  $R$ -функцій.



На рисунку 2.7 зображений графік функції  $F_{ap}(x, y, d)$ , яка має неперервні часткові похідні першого порядку і в якій вектор параметрів  $d$  знайдений з умови найкращого середньоквадратичного наближення до функції  $w(x, y)$  побудованої за допомогою  $R$ -функцій.

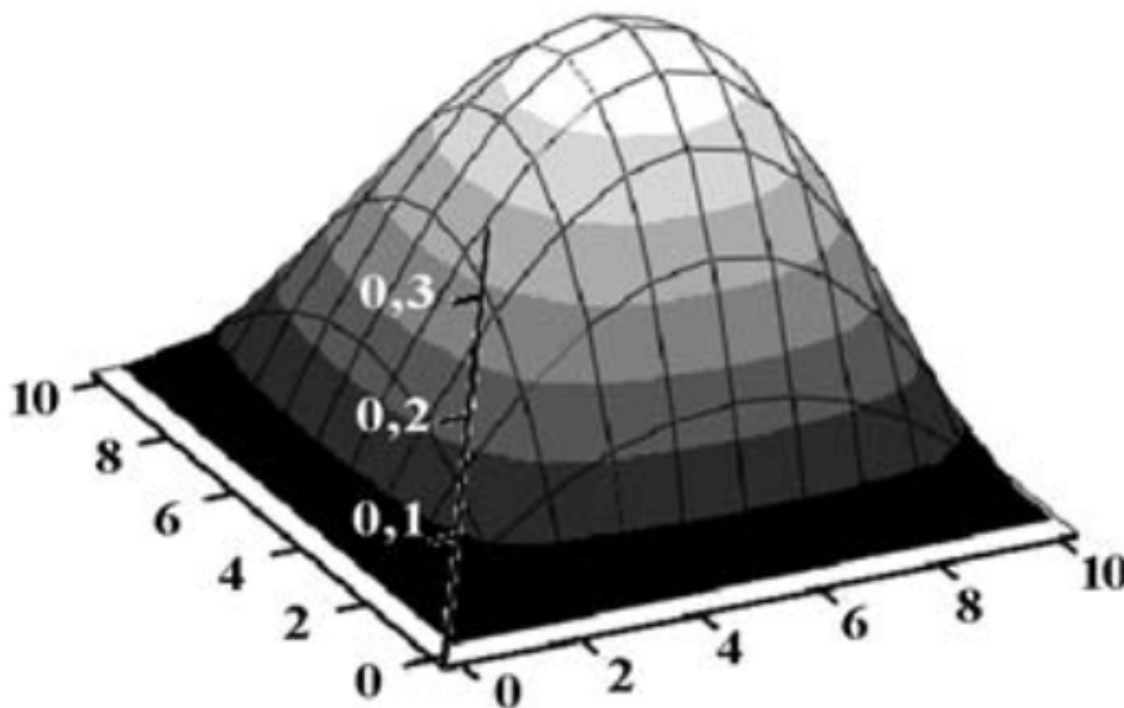


Рисунок 2.7 - Графік функції  $F_{ap}(x, y, d) \in C^1(\bar{G})$

На рисунку 2.8 зображений графік функції  $w(x, y)$ , побудований за допомогою  $R$ -функцій. Функція  $w(x, y)$  не має неперервних часткових похідних першого порядку в кутових точках.

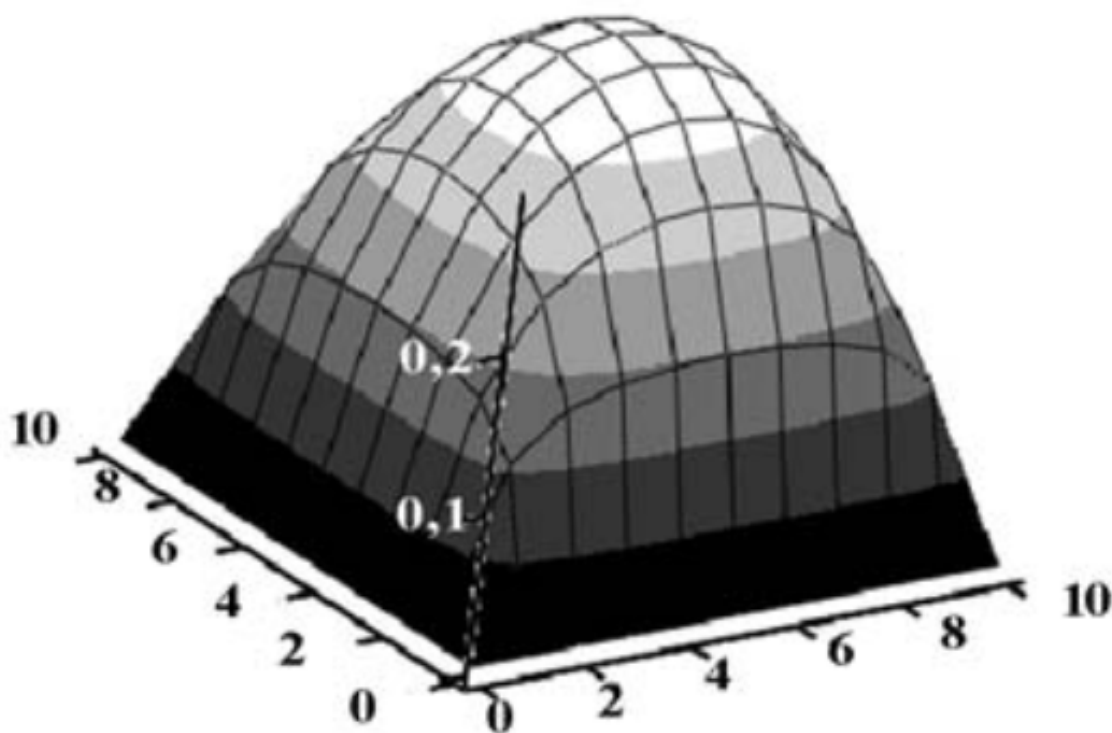


Рисунок 2.8 - Графік функції  $w(x, y) \in C(\bar{D})$

### Висновок до розділу

В даному розділі наведено методи, що використовуються для інтерполяції та апроксимації поверхні, зокрема загальний метод побудови рівнянь поверхонь за допомогою інтерлінації, а також метод зворотних зважених відстаней (Inverse Distance Weighting).

Описані функції побудови вузлів та наведені всі переваги та недоліки кожної з них, а також умови їх застосування.

### 3 МОДИФІКАЦІЯ АЛГОРИТМУ РОЗВ'ЯЗАННЯ ЗАДАЧІ

#### 3.1 Метод зворотних зважених відстаней

Метод зворотних зважених відстаней (англійською Inverse distance weighting) однозначно припускає, що об'єкти, які знаходять поруч, більш подібні один одному, ніж об'єкти, які віддалені один від одного.

Щоб про інтерполювати значення для невідомого положення, IDW використовує виміряні значення навколо місцяположення, що інтерполюється. Найближчі до про інтерпольованого місцязнаходження виміряні значення мають найбільший вплив на прогнозоване значення, ніж віддалені від нього на значну відстань.

IDW припускає, що кожна виміряна точка має локальний вплив, який зменшується зі збільшенням відстані. Це надає велику вагу точкам, які розташовані найближче до місцяположення, що інтерполюється. Вага точки зменшується як функція від відстані. Тому метод носить назву зворотніх зважених відстаней.

##### 3.1.1 Оригінальний алгоритм

Розглянемо простий варіант IDW-алгоритму.

Нехай  $x_i$  - це набір точок в просторі розмірності  $D$ , а  $y_i$  - значення функції в цих точках. Тоді IDW-інтерполянт має вигляд:

$$f(x) = \frac{\sum_i w_i(x) y_i}{\sum_i w_i(x)} \quad (3.1)$$

$$w_i(x) = \left( \frac{1}{|x - x_i|} \right)^p, p = 2$$

Функція (3.1) повинна бути «гладкою» (безперервна і диференційована) і задовольняти інтуїтивні очікування користувачів щодо досліджуваного явища.

Крім того, ця функція (3.1) повинна бути придатною для комп'ютерного застосування звичайного користувача, тобто не використовувати надскладні обчислення. В даний час основна реалізація використовує паралельні ресурси.

При такому формулюванні алгоритм має як переваги, так і недоліки.

**Переваги:**

- просто реалізація;
- відсутність параметрів, які потрібно налаштовувати;
- здатність працювати в просторі будь-якої розмірності;
- здатність працювати на будь-якій рівномірній/нерівномірній сітці.
- алгоритм ігнорує мультиколінеарність даних, здатен успішно працювати,

навіть якщо всі точки сітки вкладені в простір меншої розмірності. При правильній реалізації алгоритм успішно працює навіть на сітках із вузлами, що співпадають.

Але **недоліки** алгоритму дуже серйозні:

- низька швидкість роботи на великих об'ємах даних: обчислення інтерполянта має складність  $O(N)$ ;
- алгоритм надає надто багато ваги віддаленим вузлам. Їхня сумарна вага може виявитись більшою, ніж вага вузлів, розташованих поряд з точкою інтерполяції. Це особливо виражено в просторах високої розмірності;
- глобальність інтерполяції сама по собі являється проблемою, так як інтерполянт стає більш чутливий навіть до далеких викидів;
- у вузлах інтерполяції функція  $f(x)$  плоска, тобто має нульову похідну.

Ці недоліки перешкоджають використанню алгоритму в більшості практичних задач.

### 3.1.2 Модифікований алгоритм

#### Інтерполяція на нерівномірній сітці

Для того, щоб можна було використовувати даний алгоритм в більшості практичних задач, потрібно модифікувати інтерполянт наступним чином:

$$f(x) = \frac{\sum_{i \in K} W_i(x) Q_i(x)}{\sum_{i \in K} W_i(x)}, |K_X| = N_W < N \quad (3.2)$$

$$W_i(x) = \left( \frac{R_x - \|x - x_i\|}{R_x \|x - x_i\|} \right)^2, \|x - x_i\| = \max_{i \in K} \|x - x_i\| \quad (3.3)$$

$$Q_i(x) = x^T A x + b^T x + c, A \in R^{D \times D}, b \in R^D, c \in R \quad (3.4)$$

Модифікований метод Шепарда відрізняється від оригінального алгоритму тим, що:

- для інтерполяції використовується підмножина точок  $K$  потужністю  $N_w$  - множина  $N_w$  найближчих сусідів точки  $x$  у інтерполянті (3.2);
- вагові функції  $W_i(x)$  мають більш складний вигляд (3.3). Тепер вони стають нулями на границі сфери, радіус якої дорівнює радіусу множині найближчих сусідів точки  $x$ ;
- замість константних значень  $y_i$  у зваженій сумі тепер беруть участь вузлові функції  $Q_i(x)$ . Ці функції (3.4) можуть бути квадратичними, лінійними або константними (за вибором користувача).  $W_i(x)$  виходить в результаті зваженої апроксимації по МНК множині  $N_q$  найближчих сусідів точки  $x_i$  з обмеженням  $Q_i(x_i) = y_i$ . Вагові коефіцієнти задачі МНК вибираються за формулою (3.3);
- для пошуку найближчих сусід використовуються kd-дерева, що дозволяють знаходити найближчого сусіда за час  $O(\log N)$ .

Основні переваги алгоритму є:

- оптимальні значення знаходять перебором, але існує простий спосіб для отримання оптимальних значень;
- працездатність в просторі будь-якої розмірності;
- працездатність на будь-якій рівномірній/нерівномірній сітці;
- алгоритм ігнорує мультиколінеарність даних та здатний успішно працювати, навіть якщо всі точки сітки вкладені в підпростір меншої розмірності. Алгоритм успішно працює навіть на сітках із співпадаючими вузлами;
- Функція інтерполянта (3.2)  $f(x)$  майже всюди  $C^1$ -неперервна;

- прийнятна швидкодія на великих наборах точок. Досягнуто завдяки використанню швидкого алгоритму пошуку найближчих сусідів. Побудова моделі має складність  $O(N \log N)$ , інтерполяція -  $O(\log N)$ ;

- відсутність «плоских плям» в околицях вузлів(при використанні квадратичних або лінійних вузлових функцій);

- локальність інтерполяційної схеми. Значення  $f(x)$  залежить тільки від найближчих до точки  $x$  вузлів, що вирішує ряд проблем і істотно покращує якість інтерполяційної схеми;

- можливість використовувати алгоритм для вирішення завдань регресії, тобто для роботи із зачумленими даними.

Основні недоліки алгоритму:

- алгоритм перевершує за швидкість оригінальний IDW-алгоритм тільки на великих наборах точок(порядку декількох сотень) і в просторах помірної розмірності(2-5). На менших наборах точок позначаються накладні витрати, пов'язані із навігацією по дереву пошуку, хоча швидкодія алгоритму як і раніше залишається прийнятною. У просторах вищої розмірності починається зниження швидкодії пошуку по kd-дереву;

- хоча алгоритм працездатний на будь-якій сітці, швидкодія знижується, якщо точки вкладені в підпростір меншої розмірності. Це пов'язано з тим, що в таких випадках для вирішення завдань МНК використовується заснований на SVD солвер замість більш швидкого заснованого на QR солвер;

- у деяких рідкісних випадках  $f(x)$  може мати розриви. Розрив виникає, якщо більш ніж  $N_w$  найближчих сусідів точки  $x$  знаходяться на абсолютно однаковій відстані від неї. У цьому випадку алгоритм пошуку  $N_w$  найближчих сусідів не зможе зробити однозначний вибір, і, в залежності від округлень в ході операцій над числами з плаваючою комою, в околицях  $x$  найближчі сусіди будуть вибиратися випадковим чином. Однак  $f(x)$  в будь-якому випадку залишається обмеженою, а з ростом  $N_w$  ймовірність такої ситуації знижується(зокрема, нижня межа для  $N_w$

встановлена такою, щоб подібна похибка впринципі не могла виникнути на прямокутній сітці).

### **Апроксимація на нерівномірній сітці**

Алгоритм природним чином модифікується для роботи із зачумленими даними: досить лише незначно модифікувати задачу МНК, рішенням якої є вузлова функція  $Q_i(x)$

По-перше, зникає обмеження  $Q_i(x_i) = y_i$ .

По-друге, вагові коефіцієнти, що використовуються для обчислення  $Q_i(x)$ , ставлять рівними 1. Таким чином, функція  $Q_i(x)$  в деякому сенсі усереднює сусідні з  $x_i$  точки.

Самі формули (3.2) – (3.4) залишаються незмінними. Всі зміни відносяться лише до того, як обчислюються коефіцієнти  $A, b, c$  у формулі (3.4).

Отримана таким чином  $f(x)$  вже не проходить через визначені точки, тобто ми маємо задачу апроксимації. Цей алгоритм має сенс застосування тоді і тільки тоді, коли ми працюємо із зачумленими даними. У незашумленому випадку апроксимаційна схема не має переваг перед інтерполяційною.

### **3.1.3 Налаштування алгоритму**

#### **Вибір параметрів $N_w$ та $N_q$**

Параметри  $N_w$  та  $N_q$  відповідають за кількість вузлів, що використовуються на стадії інтерполяції(параметр  $N_w$ )і на стадії побудови вузових функцій(параметр  $N_q$ ).

Параметр  $N_w$  контролює локальність алгоритму. Чим більше його значення, тим більше вузлів використовується для інтерполяції(нижча швидкодія), і тим більше значення інтерполянта залежить від значень функції у віддалених вузлах(нижче якість). З іншого боку, занадто мале значення  $N_w$  зробить інтерполянт різкішим, занадто сильно залежним від прилеглих вузлів. Вдало підібране значення  $N_w$  зазвичай не набагато більше ніж  $\max(1.5N_q, 2^D + 1)$ .

Параметр  $N_q$  відповідає за інший аспект локальності: він відповідає за кількість вузлів, що використовуються для визначення рельєфу вузлових функцій. Хороша вузлова функція повинна проходити через  $(x_i, y_i)$  і відтворювати рельєф функції в околицях  $x_i$ . Занадто велике значення – і вузлова функція стане глобально, адаптується до значень функції в далеких вузлах, в яких ця вузлова функція не дуже потрібна.

Вдало підібране значення  $N_q$  зазвичай в 1.5-2 рази більше ніж кількість вільних параметрів у вузловій функції:  $1 + D$  - у лінійної функції,  $(D + 2) \cdot (D + 1)/2$  - у квадратичної функції.

Ситуація дещо змінюється при вирішенні задач апроксимації. Сенса параметра  $N_w$  і рекомендації по його вибору залишаються без змін. Однак параметр  $N_q$  має інший зміст: тепер він відповідає не тільки за локальність алгоритму, а й за усереднення шумів у вхідних даних. Чим більше рівень шуму, тим більше повинно бути значення  $N_q$ , щоб впоратися з ним.

### **Вибір вузлових функцій**

При вирішенні задач інтерполяції користувач може вибрати між чотирма типами вузлових функцій:

- константна вузлова функція, яка використовується в оригінальному алгоритмі, і складена виключно для тестування;
- лінійна вузлова функція, коефіцієнти якої визначаються по МНК. Ця функція забезпечує кращу якість, ніж константна функція;
- квадратична вузлова функція, коефіцієнти якої визначаються по МНК. Ця функція забезпечує найкращу якість, при умові, що є достатньо даних для обчислення коефіцієнтів квадратичної апроксимації. Якщо це не так, краще використовувати лінійну вузлову функцію;
- «швидка» лінійна вузлова функція, коефіцієнти якої визначаються шляхом інтерполяції градієнта. Це альтернативний варіант, що зарезервований для випадків, коли швидкість побудови моделі важливіша ніж її якість. Коефіцієнти цієї функції



не мінімізуються суму квадратів невязок, але часто дають прийнятні результати при інтерполяції. Однак, цей алгоритм є дещо менш стійкий до викидів та шумів у вхідних даних, ніж попередні два алгоритми, тому його слід використовувати тільки якщо ви заздалегідь можете переконатись в його працездатності;

При вирішенні задач апроксимації доступні тільки два види вузлових функцій: лінійна квадратична. Квадратична вузлова функція як і раніше є оптимальним вибором – але тільки якщо у вас достатньо даних, щоб боротися з шумом. Якщо рівень шуму дуже великий, або даних занадто мало, лінійна вузлова функція може виявитися більш стійким варіантом.

## 4 ОПИС ПРОГРАМНОГО ПРОДУКТУ

### 4.1 Засоби розробки

При створенні програмного продукту були використані такі засоби для програмування як:

- мова програмування Python;
- бібліотека SciPy;
- бібліотека NumPy;
- бібліотека Qt;

Python простий у використанні та легко і швидко може вирішувати поставлені задачі. Ця мова підтримує як функціональну, так і об'єктно-орієнтовану парадигму програмування. Водночас з цим - це повноцінна мова програмування, що підтримує багато засобів для реалізації та підтримки масштабних проектів.

Python – високорівнева мова програмування загального призначення, орієнтована на підвищення продуктивності розробника та читабельності коду. Синтаксис ядра мінімалістичний, інтерпретована мова, що дозволяє заощадити значну кількість часу, що зазвичай витрачається на компіляцію. Ця мова програмування підтримує декілька парадигм: структурна, об'єктно-орієнтована, функціональна та імперативна. В даному проекті використовується об'єктно-орієнтована парадигма.

#### Переваги SciPy

SciPy – екосистема відкритих висхідних кодів програм для математики, науки та інженерії, яка базується на мові програмування Python. Містить модулі для оптимізації, інтегрування, обробки сигналів, обробки зображень, генетичних алгоритмів та інших задач.

#### Переваги NumPy

NumPy – це фундаментальна Python бібліотека для наукових обчислень. Вона містить:

- потужний механізм представлення та обробки N-вимірних масивів;

- складні функції;
- корисну лінійну алгебру, перетворення Фур'є, а також генератор псевдовипадковим чисел.

#### **4.2 Вимоги до технічного забезпечення**

Далі буде наведено мінімальні вимоги до технічного забезпечення, оскільки чим потужніша система, тим швидше виконуватиметься обрахунки. Але існує мінімум для задовільного часу виконання програми.

Для правильної роботи даного програмного продукту до складу технічних засобів повинні входити:

- а) комп'ютер з такою конфігурацією:
  - 1) процесор з тактовою частотою не нижче 1 ГГц;
  - 2) дискова підсистема – 40 Гб;
  - 3) достатній об'єм оперативної пам'яті (не менше 512 МБ);
  - 4) інші складові можуть мати будь-які параметри, тому що вони не значним чином впливають на роботу програми;
- б) додатково має бути встановлене таке програмне забезпечення:
  - 1) операційна система сімейства UNIX;
  - 2) Python 2.7;
- в) комп'ютерна периферія, до складу якої входить:
  - 1) монітор;
  - 2) мишка;
  - 3) клавіатура.

Інтерфейсний рівень являє собою рівень відображення даних на стороні клієнта. Дані відображаються користувачеві за допомогою графічного інтерфейсу у вигляді Qt форм.

### 4.3 Розробка програмного застосунку

Просторові та просторово-часові розподіли фізичних явищ можуть бути апроксимовані функціями залежно від місцезнаходження в багатовимірному просторі, як багатовимірні скалярні, векторні або тензорні поля. Типові приклади - це висоти рельєфу, кліматичні явища, властивості ґрунту, щільність популяції і т. д. Поки більшість із цих явищ характеризуються вимірюваними або оцифрованими точковими даними, які часто нерівномірно розподілені в просторі та часі, візуалізація, аналіз, і моделювання цих явищ зазвичай базуються на растровому представленні. Більше того, явища можна вимірювати за допомогою різних методів (дистанційне зондування тощо), що веде до різномірних наборів даних з різними цифровими зображеннями та роздільностями, які необхідно об'єднати, щоб створити єдину просторову модель досліджуваного явища.

Багато методів інтерполяції та наближення були розроблені для прогнозування значень просторових явищ для місць, де не проводились вимірювання. В більшості ці методи були розроблені для підтримки перетворення між різними дискретними та безперервними уявленнями просторового та просторово-часового поля, як правило, для перетворення точки або вектора даних у растрове представлення, або для перебудови карти з різною растровою роздільною здатністю.

В даній програмі реалізовано два методи інтерполяції поверхні: основний алгоритм – це модифікація методу зворотних зважених відстаней(IDW), та додатковий алгоритм – Крігінг.

Додатковий алгоритм реалізовано без жодних модифікацій та оптимізацій для порівняння роботи оптимізованого алгоритму зворотних зважених відстаней.

Метод зворотних зважених відстаней(англійською Inverse distance weighting) однозначно припускає, що об'єкти, які знаходяться поруч, більш подібні один одному, ніж об'єкти, які віддалені один від одного.

Щоб про інтерполювати значення для невідомого положення, IDW використовує виміряні значення навколо місцяположення, що інтерполюється.

Найближчі до про інтерпольованого місця знаходження виміряні значення мають найбільший вплив на прогнозоване значення, ніж віддалені від нього на значну відстань.

IDW припускає, що кожна виміряна точка має локальний вплив, який зменшується зі збільшенням відстані. Це надає велику вагу точкам, які розташовані найближче до місця положення, що інтерполюється. Вага точки зменшується як функція від відстані. Тому метод носить назву зворотніх зважених відстаней.

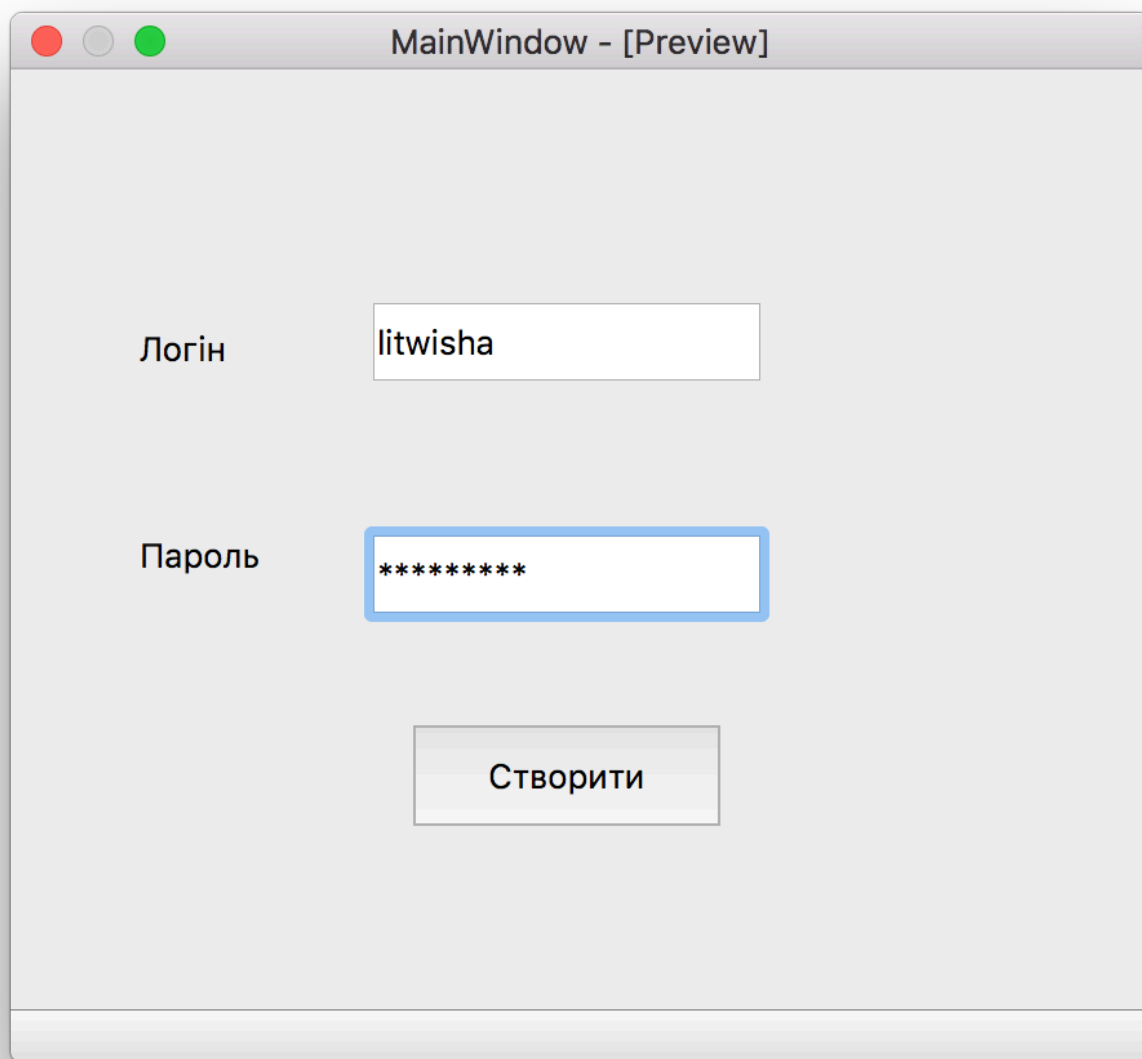
Крігінг — це вид узагальненої лінійної регресії, який використовує статистичні параметри для знаходження оптимальної оцінки в сенсі мінімального середнього відхилення при побудові поверхонь, кубів і карт. Даний інтерполяційний метод геостатистики названий на честь південноафриканського гірського інженера Деніела Кріга, який займався ручним створенням геологічних карт за обмеженим набором даних в деякій області. В основу методу покладено принцип незміщеності середнього; тобто, взяті всі разом значення на мапі повинні мати правильне середнє значення. Глобальна незміщеність формально забезпечується за рахунок підвищення найнижчих значень і зменшення високих[27].

З точки зору загальної статистики крігінг полягає в мінімізації дисперсії похибки вимірювання, яка є функцією від вимірюваних ваг. Мінімізація цієї дисперсії зменшує середню квадратичну похибку відхилення оціненого значення від можливого. Досягається це шляхом прирівнювання до нуля першої похідною похибки щодо кожної невідомої ваги. В результаті виводиться система рівнянь, розв'язком якої є вектор ваг.

#### **4.4 Керівництво користувача**

Для запуску програмного застосування необхідно відкрити файл застосунку, який знаходиться у папці з проектом.

Відкриється форма авторизація до програми, зображена на рисунку 4.1.



The image shows a preview window titled "MainWindow - [Preview]". Inside the window, there is a login form with the following elements:

- A label "Логін" (Login) followed by a text input field containing the text "litwisha".
- A label "Пароль" (Password) followed by a password input field containing ten asterisks "\*\*\*\*\*". This field has a blue border, indicating it is the active element.
- A button labeled "Створити" (Create) located below the password field.

Рисунок 4.1 – Форма авторизації

Після успішної авторизації, відкриється головна форма інтерфейсу застосунку, що зображена на рисунку 4.2.

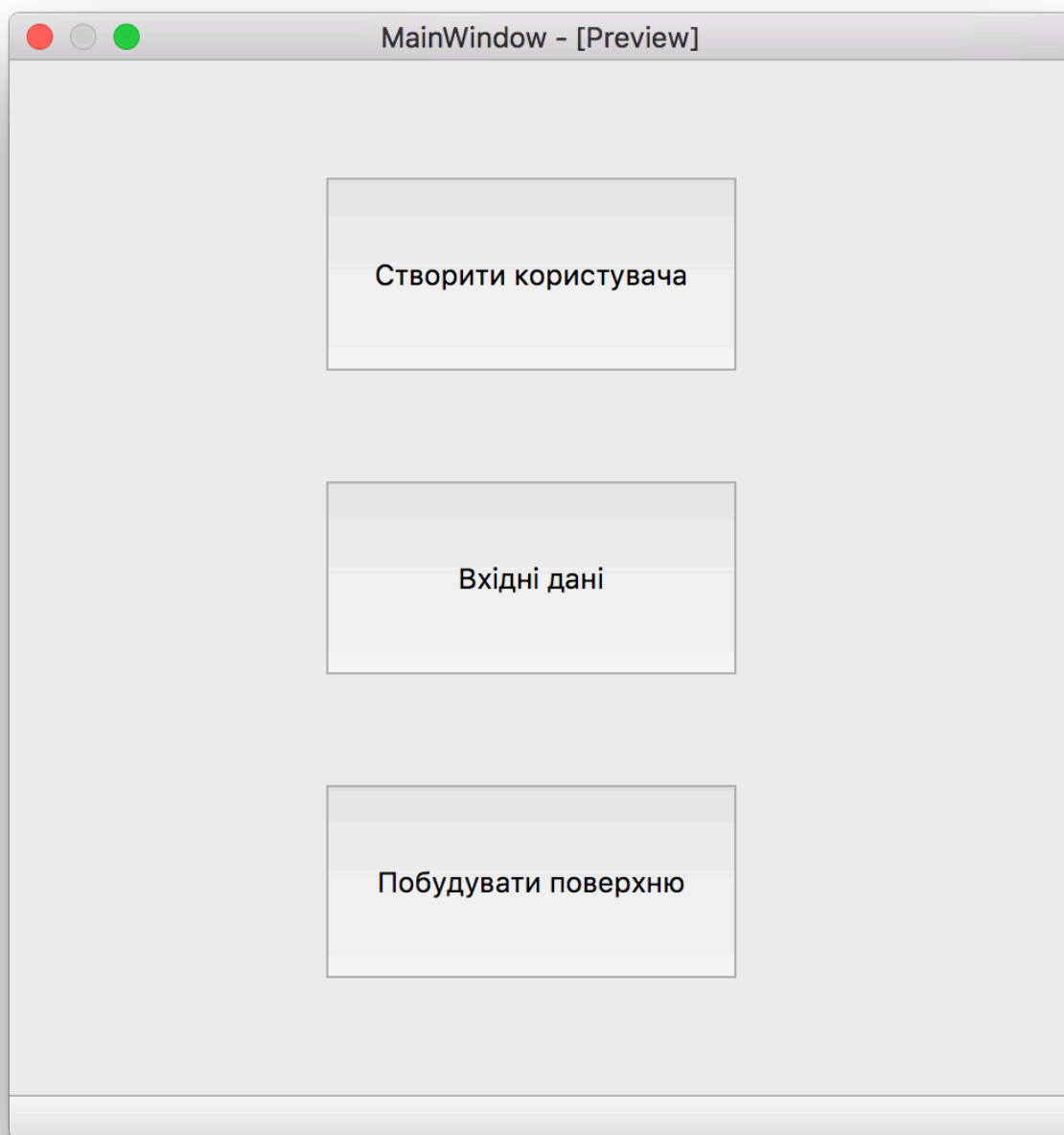


Рисунок 4.2 – Головне вікно програми

З головного вікна програми є можливість:

- створити нового користувача(ця опція доступна тільки для адміністратора);
- обробити вхідні дані програми;
- побудувати локальну карту рельєфу по заданими координатами.

Вхідними даними для програми служать дані SRTM(Shuttle Radar Topography Mission) – це радарна топографічна зйомка більшої частини земної кулі, що проводилася в 2000 році.

Побудова локальної карти рельєфу може відбуватися двома алгоритмами: основним алгоритмом(модифікація алгоритму зворотних зважених відстаней) та Крігінг(додатковий алгоритм).

Після вибору пункту «Вхідні дані», користувачу надається можливість переглянути наявні вхідні дані, або завантажити нові.

У вікні вхідних даних, що зображено на рисунку 4.3, можна переглянути наявні бінарні файли, а також перейти до автоматичного завантаження вхідних даних шляхом введення координат поверхні для моделювання.

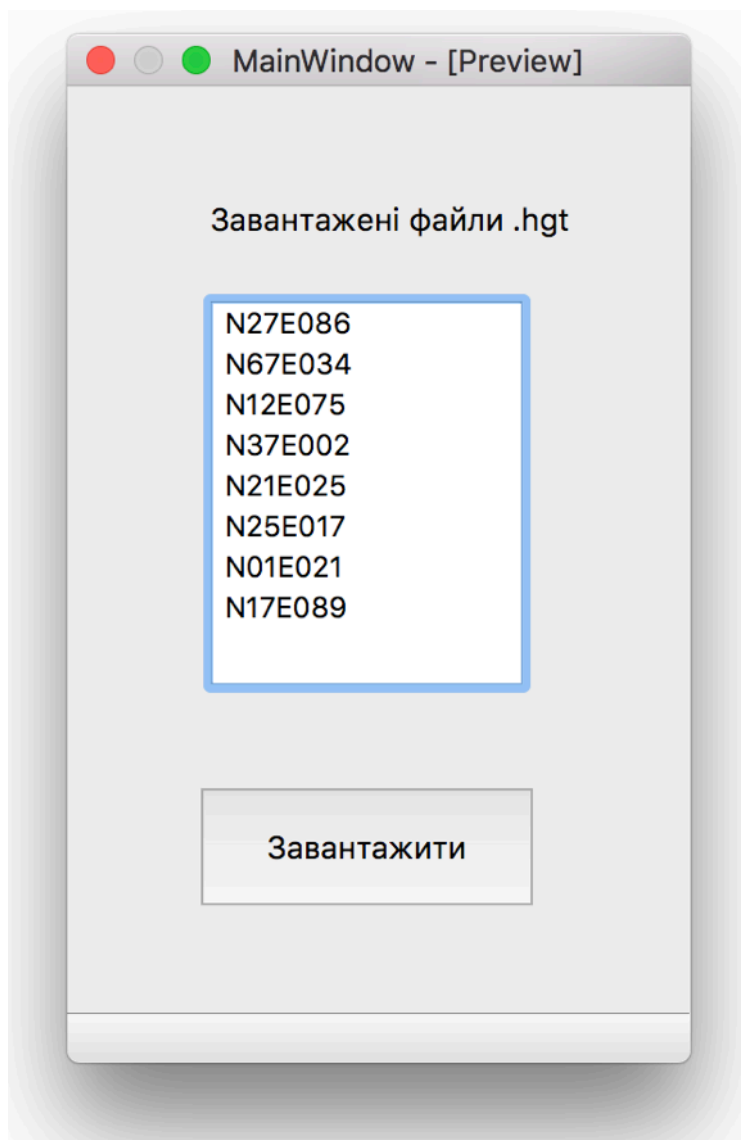
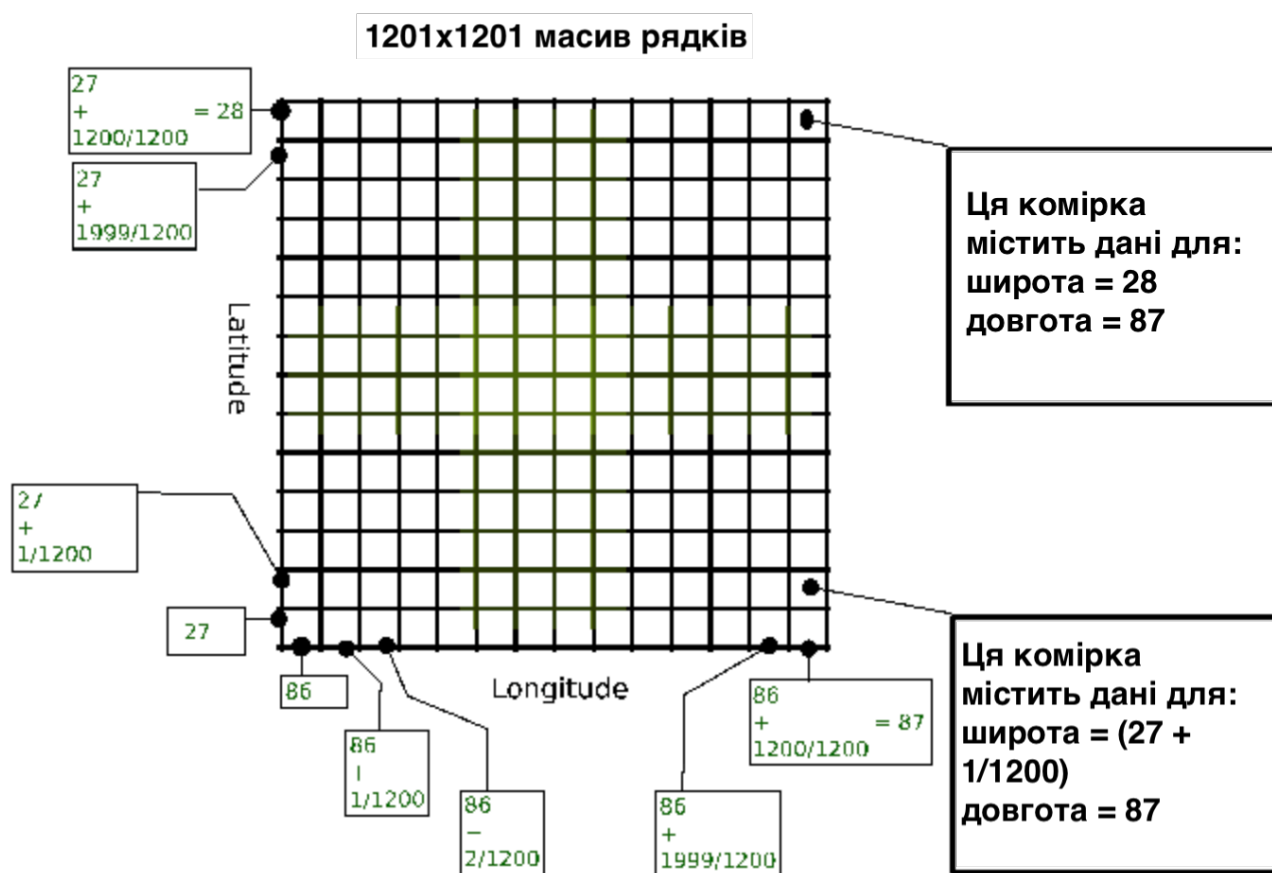


Рисунок 4.3 – Форма вхідних даних



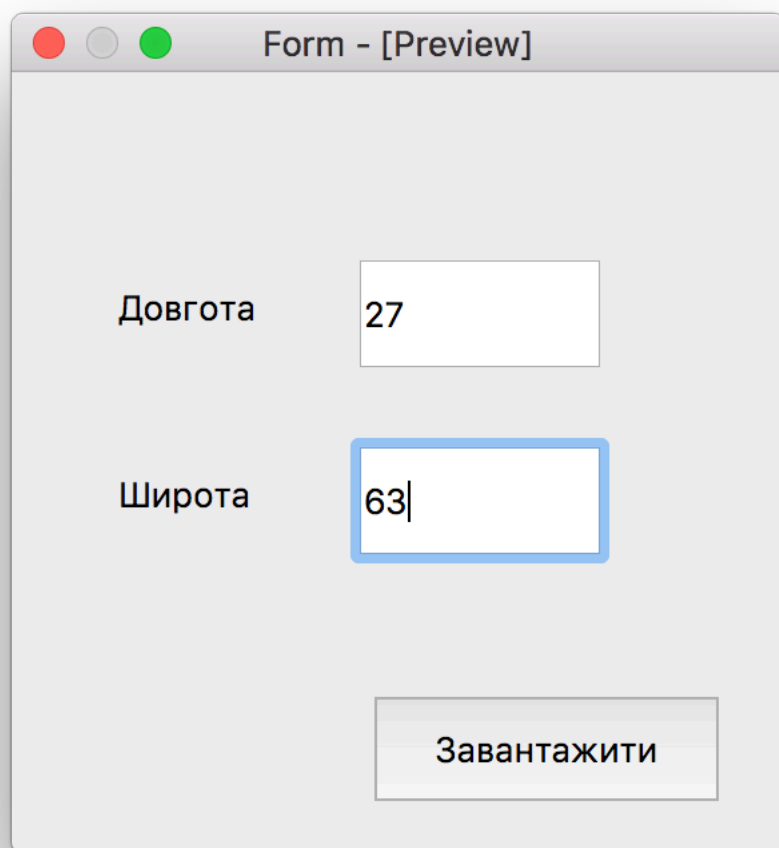
Більш детальноше зупинимось на вхідних даних. Вхідними даними до програми є бінарні файли SRTM формату .hgt.

SRTM(Shuttle Radar Topography Mission) – це радарна топографічна зйомка більшої частини земної кулі, що відбулася в 2000 році. Ці дані є у відкритому доступі і являються собою бінарні файли двох форматів: SRTM1(з кроком 1 арксекунда), та SRTM3(з кроком 3 арксекунди). Для більш точної побудови локальної мапи рельєфу в програмі використовуються дані SRTM1, які мають в 3 рази більшу точність, тобто крок зйомки земної поверхні в три рази менший ніж в даних SRTM3. Було вирішено використовувати більш точні дані, оскільки програма призначена для побудови карти рельєфу на більш локальному рівні, аніж на глобальному, тому нам важлива більша точність. Вхідні дані поділені на файли для кожного елементу декартового добутку широти та довготи, наприклад N27E086 – це інформація висот для діапазону: широта від 27 до 28, та довгота від 86 до 87. Приклад збереження інформації висот для SRTM3 наведено на рисунку 4.4.



Оскільки дані висот зберігаються в формі матриць, то нема сенсу зберігати їх в оперативній пам'яті, тому що даних дуже багато. Саме тому ці файли зберігаються на жорсткому диску і мають розмір в середньому 25-30 мегабайт.

Оскільки для побудови карти рельєфу потрібна файли з даними висот для конкретних координат, а координати варіюються з часом, то користувачу надається

A screenshot of a software window titled "Form - [Preview]". The window has a light gray background and a standard macOS-style title bar with red, yellow, and green window control buttons. Inside the window, there are two text input fields. The first field is labeled "Довгота" (Longitude) and contains the number "27". The second field is labeled "Широта" (Latitude) and contains the number "63", with a blue selection box around it. Below these fields is a button labeled "Завантажити" (Load).

можливість завантажити потрібний файл, просто ввівши координати висоти та довготи, замість того, щоб вручну завантажувати і переносити файли в теку програми. Форма завантаження має простий та зрозумілий вигляд(зображена на рисунку 4.5).

Рисунок 4.5 – Форма для завантаження вхідних даних

З головного меню користувач може перейти до головної частини програми, а саме побудови локальної карти рельєфу, натиснувши на кнопку «Побудувати

поверхню». Після натиску на цю кнопку, відкриється нове вікно, що зображено на рисунку 4.6.

The screenshot shows a window titled "MainWindow - [Preview]" with a standard macOS-style title bar (red, yellow, green buttons). The window contains a form with the following elements:

- A title: "Введіть координати точки центру та радіус" (Enter the coordinates of the center point and radius).
- Two input fields for coordinates:
  - "Довгота" (Longitude) with the value "27".
  - "Широта" (Latitude) with the value "83".
- A single input field for radius:
  - "Радіус(м)" (Radius in meters) with the value "200". This field is highlighted with a blue border.
- Two buttons for selecting an algorithm:
  - "Основний алгоритм(IDW)" (Main algorithm (IDW)).
  - "Kriging".
- A button at the bottom: "Обчислити похибку" (Calculate error).

Рисунок 4.6 – Форма для вводу параметрів побудови поверхні

На цій формі, користувачу потрібно ввести три параметри, а саме координати центру поверхні для інтерполяції у форматі довготи та широти, а також радіус інтерполяції, який вимірюється в метрах.

Після цього, користувачу надається вибір, яким методом побудувати поверхню:

- основним алгоритмом модифікованого методу зворотних зважених відстаней;
- додатковим алгоритмом(Крігінга).

Додатковий алгоритм реалізований для візуального порівняння роботи основного алгоритму та щоб побачити всі переваги модифікованого алгоритму зворотних зважених відстаней та порівняти похибки роботи програми.

Для прикладу наведемо вікна побудови карт рельєфу обох методів.

На рисунку 4.7 зображений результат роботи основного алгоритму, а саме модифікованого методу зворотних зважених відстаней.

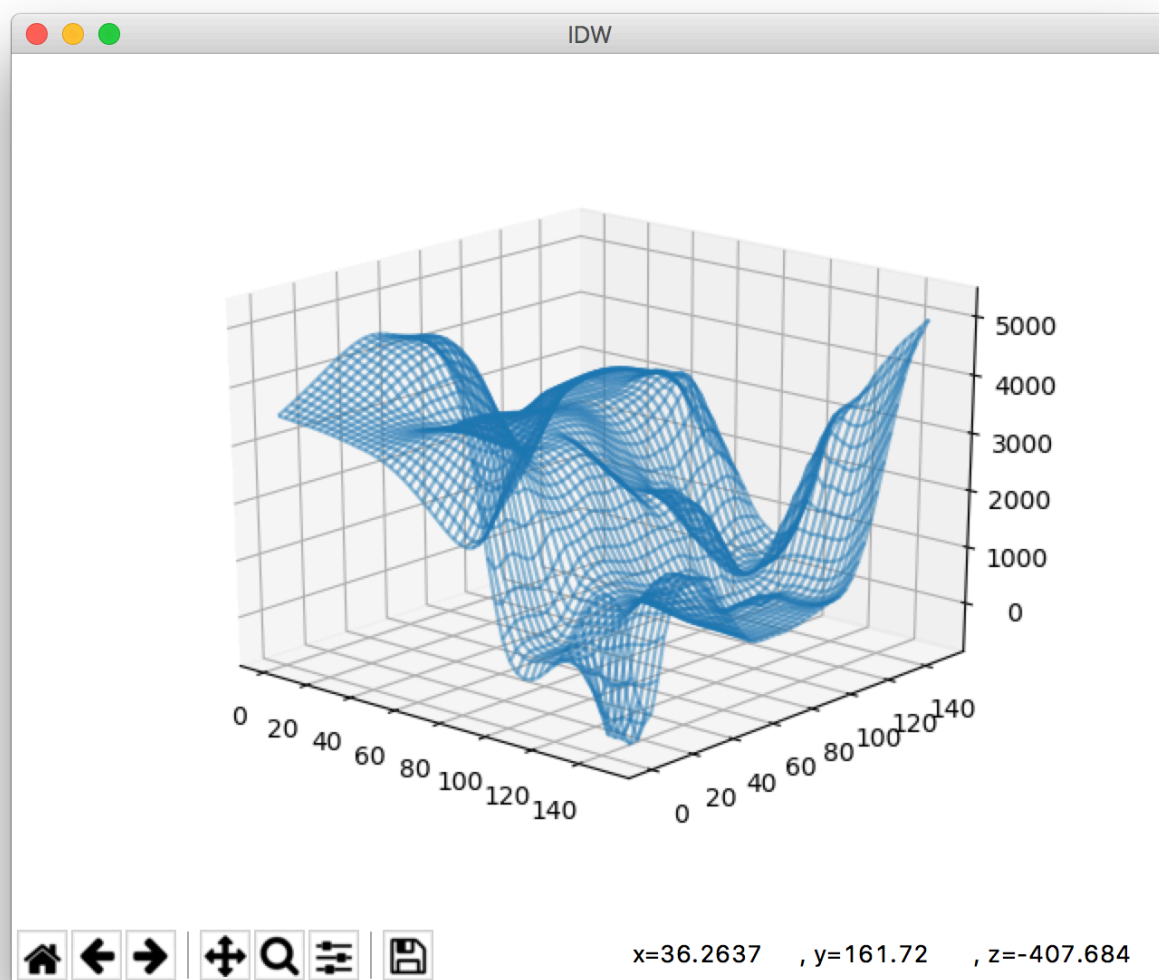


Рисунок 4.7 – Вікно результату роботи основного методу IDW

На рисунку 4.8 зображений результат роботи додаткового методу Крігінг.

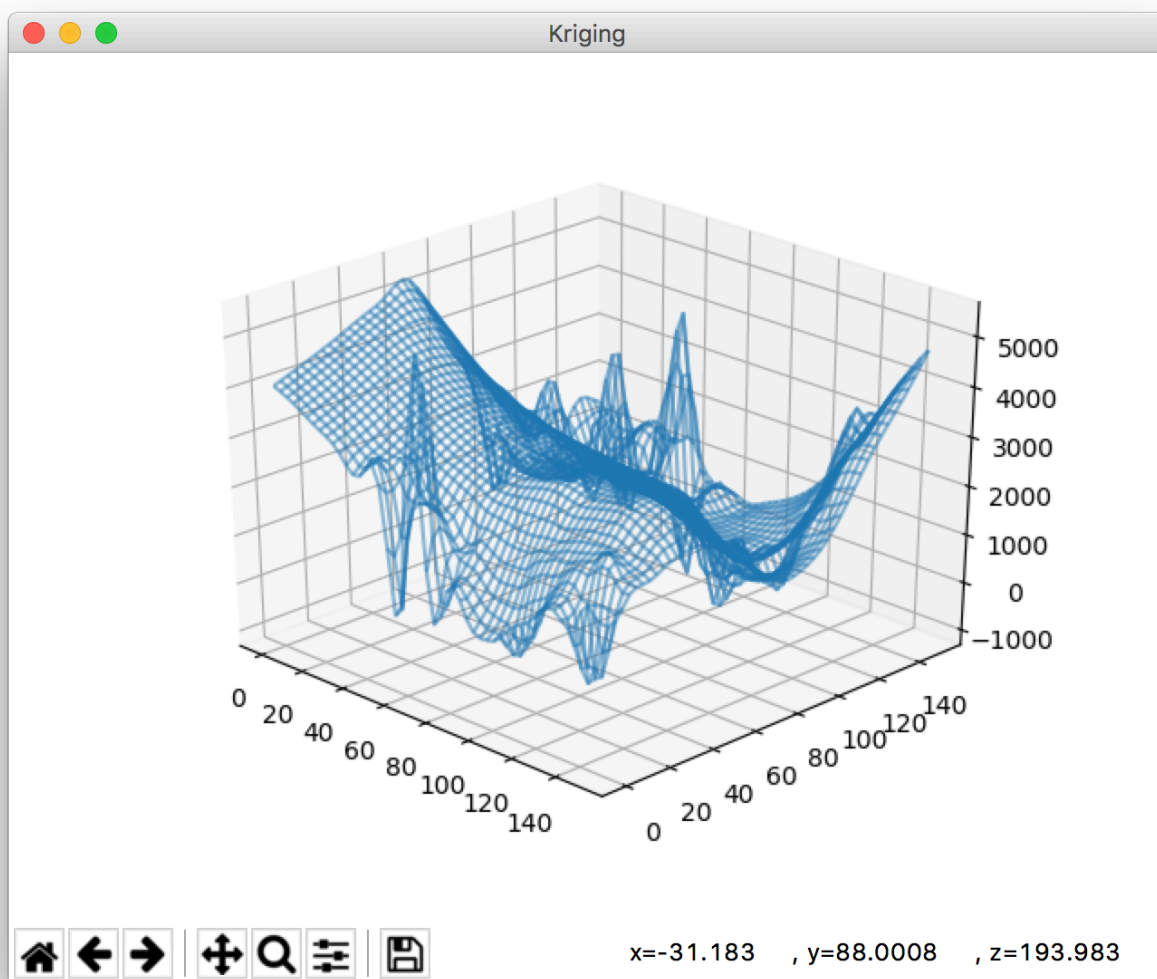


Рисунок 4.8 – Вікно результату роботи додаткового методу Крігінг

Після виконання обох методів, можемо перейти до аналізу результатів і порівняння похибок обох алгоритмів, натиснувши на кнопку «Обчислити похибку», що на рисунку 4.6.

Для побудови локальної карти рельєфу беруться не всі точки даних SRTM1, а тільки 80% покриття заданої поверхні. Це зроблено для того, щоб ми могли визначити точність інтерполяції, порівнявши інтерпольовані значення із фактичними в решті 20% даних, що не бралися до уваги при інтерполяції поверхні.

Дані про похибки для обох алгоритмів зображені на рисунку 4.9.

Dialog - [Preview]	
Основний алгоритм(IDW)	Крігінг
Похибка: 3.567 %	Похибка: 9.832 %
Найбільша похибка: 5.242 %	Найбільша похибка: 14.1 %
Співпадіння: 77 %	Співпадіння: 53 %

Рисунок 4.9 – Вікно результату роботи алгоритмів

Для оцінки якості інтерполяції для обох методів було використано три показники, а саме:

- середня похибка;
- найбільша похибка – відсоткове співвідношення «найневдалішої» інтерпольованої точки;
- співпадіння – відсоткове співвідношення інтерпольованих точок, що співпали з фактичним значення(допустима похибка 1 м).

#### 4.5 Результати досліджень

У межах роботи, було розроблено модифікацію існуючого алгоритму інтерполяції поверхні та проведено його оптимізацію, а саме метод зворотних зважених відстаней. Завдяки модифікації, алгоритм коректно працює на великих наборах даних та просторах великої розмірності, що буде показано далі. Хоча алгоритм не став ідеальним для побудови просторової інтерполяції, але для невеликих масштабів моделювання, він підходить найкраще.

Оскільки значення інтерпольованої точки залежить тільки від найближчих до точки вузлів, то це вирішує ряд проблема та істотно покращує якість інтерполяційної схеми.

Зменшилась часова складність алгоритму на великих наборах даних та швидкодія алгоритму стала прийнятною. Це досягнуто завдяки використанню швидкого алгоритму пошуку найближчих сусідів завдяки kd-деревам. Побудова моделі має складність  $O(N \log N)$ , а сама інтерполяція  $O(\log N)$ .

Для прикладу проведемо інтерполяцію поверхні, але не беручи весь набір даних, а опустимо 21 точку і після інтерполяції проведемо порівняння двох методів.

Таблиця 4.1 – Вхідні дані та результати роботи алгоритмів

Справжнє значення	Модифікований IDW	Крігінг
2	2	2.56
59	58.02	61
137	126.29	146
64	64.76	72.12
60	58.9	60
214	207.85	236.72
31	30	37.75
160	160	147.98
65	65	66.06
73	73.21	87
292	280	292
267	265.32	320.43
141	137	172.85
279	277.21	280
61	56.86	52.05
247	247	205.76
141	140	110.15
65	64.43	65

200	199.5	177
37	38.21	30.68
86	86	97.04

Побудуємо графіки на основі даних із таблиці 4.1, для візуального порівняння роботи модифікованого методу зворотних зважених відстаней та Крігінга.

На рисунку 4.10 проілюстровано графік результату інтерполяції для модифікованого алгоритму зворотних зважених відстаней.

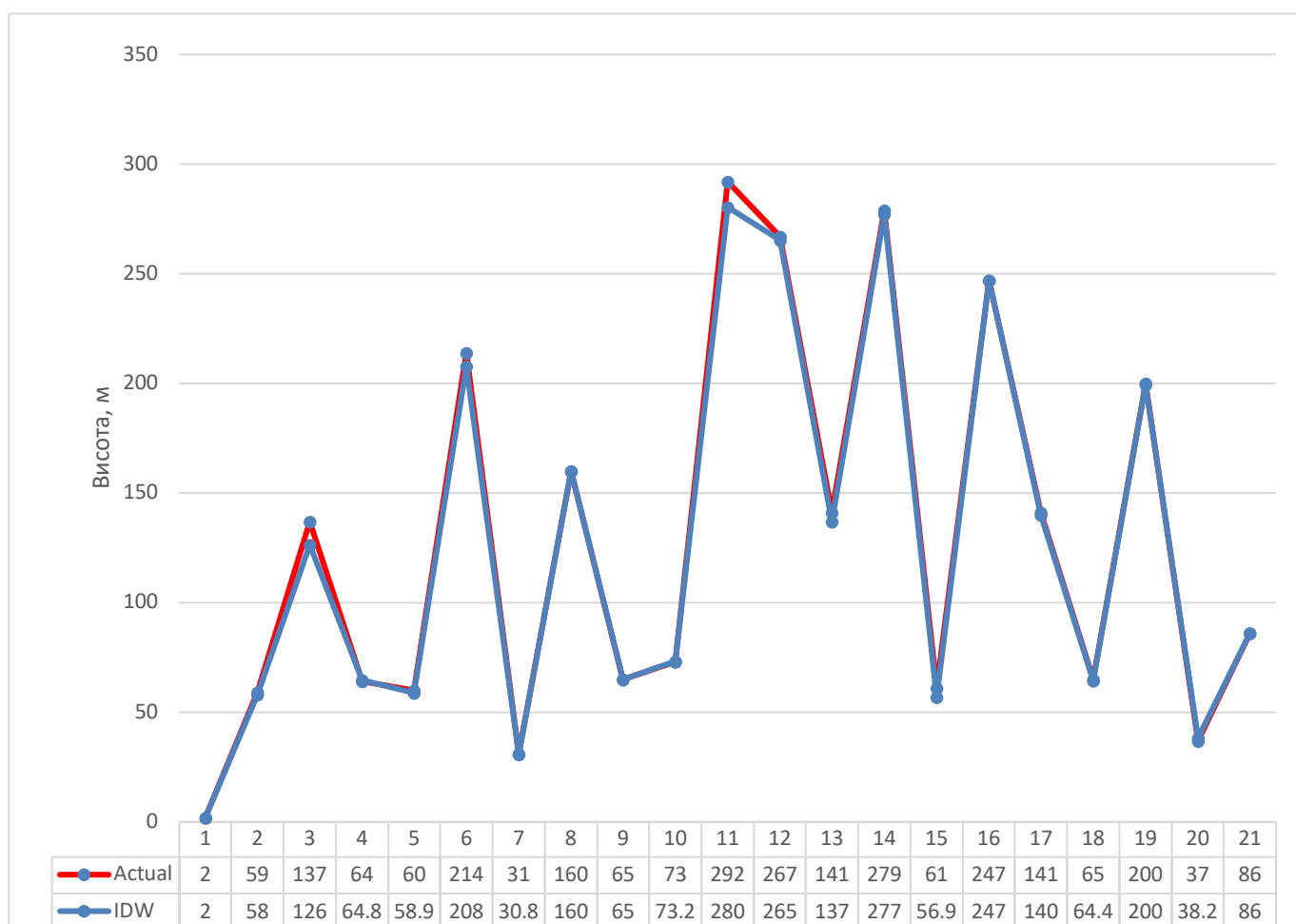


Рисунок 4.10 – Графік результату інтерполяції для модифікованого алгоритму зворотних зважених відстаней



На рисунку 4.11 проілюстровано графік результату для алгоритму Крігінг.

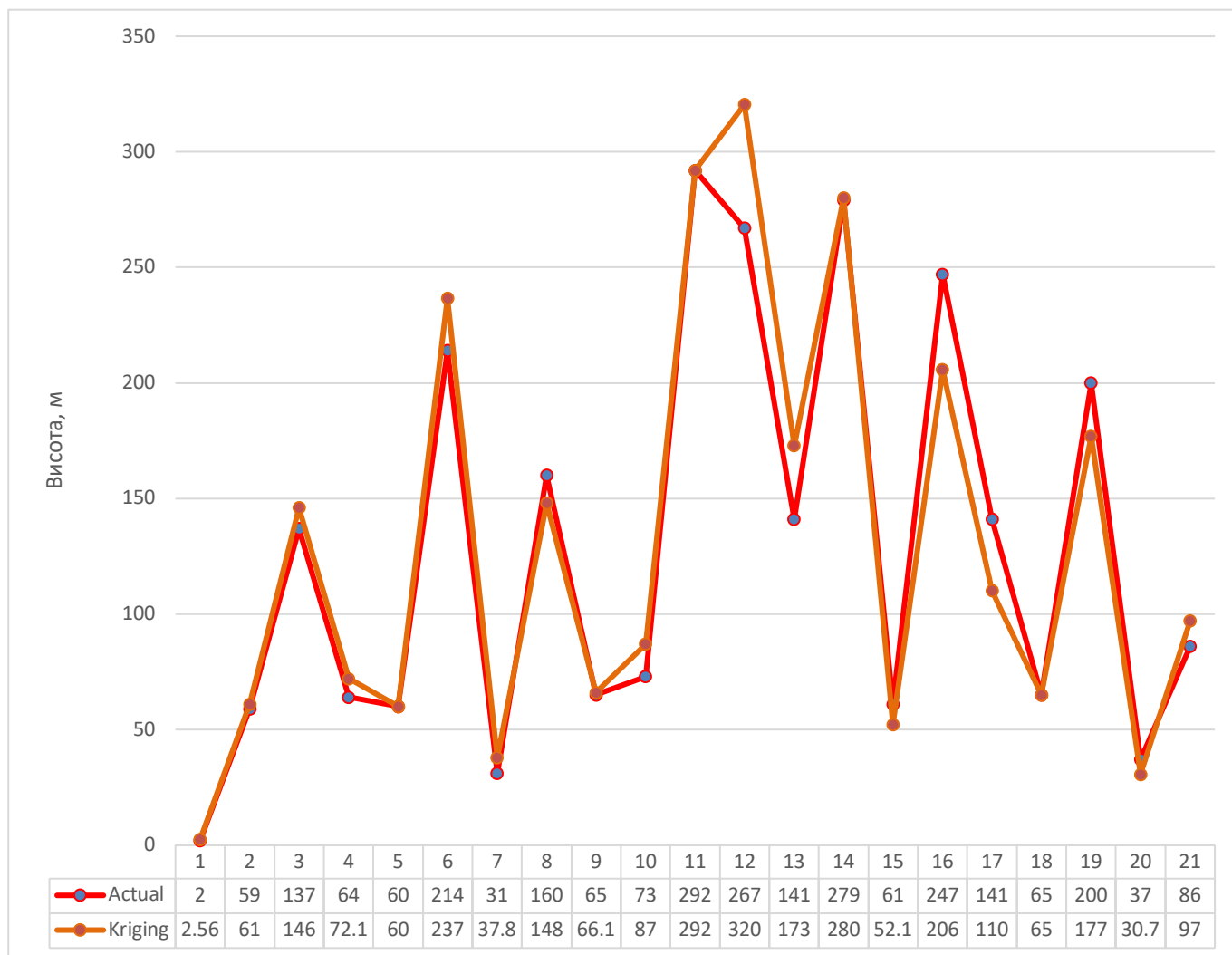


Рисунок 4.11 – Графік результату інтерполяції для Крігінг

На рисунку 4.12 проілюстровано графік результатів інтерполяції обох алгоритмів.

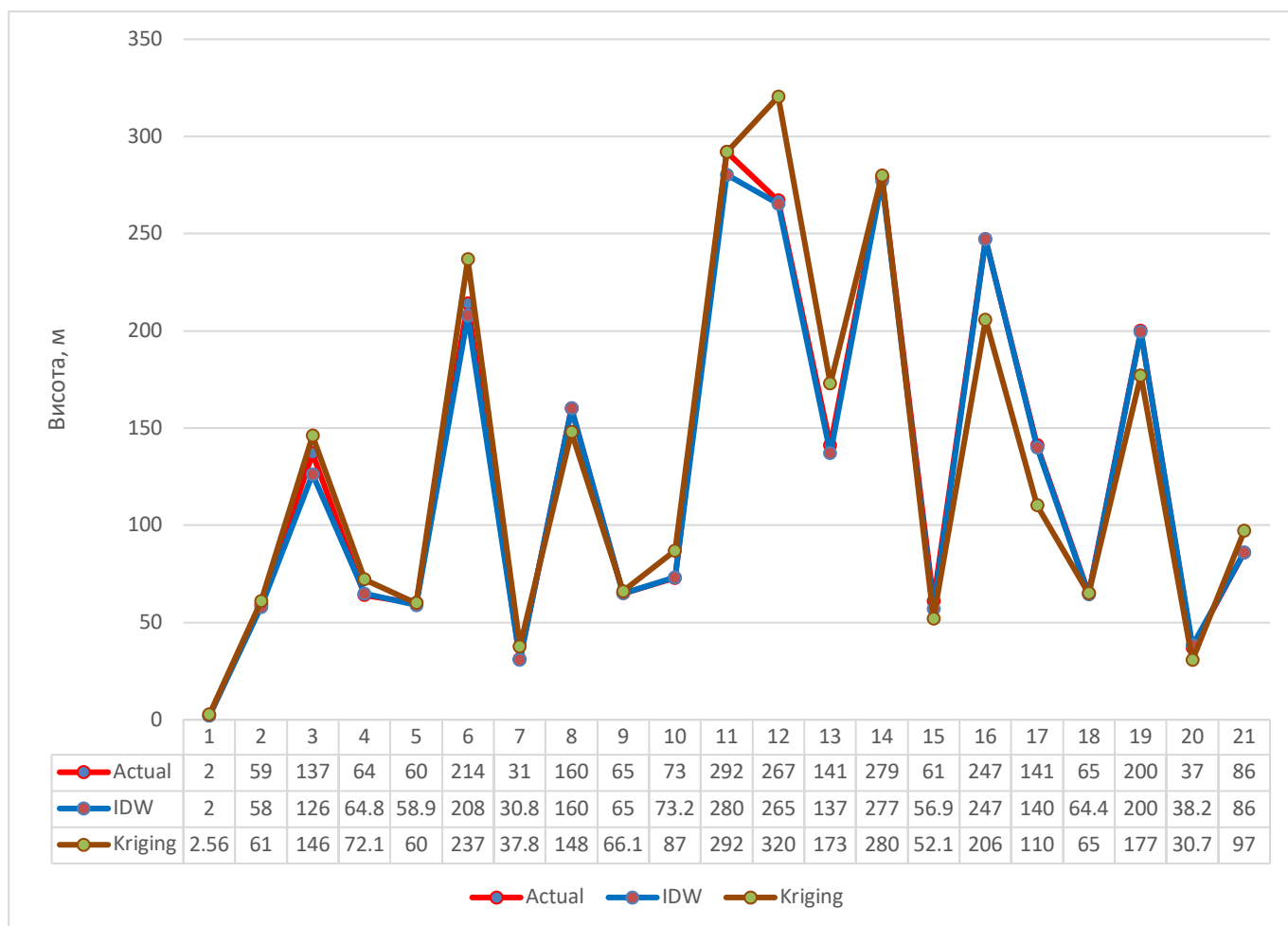


Рисунок 4.12 – Графік результатів інтерполяції обох алгоритмів

Отже, з рисунків 4.10-4.12 видно, що модифікований алгоритм зворотних зважених відстаней працює більш коректно ніж Крігінг, дає меншу похибку та менші перепади висот. З точки зору апаратного забезпечення, цей метод вимагає менше процесорної швидкості, але додаткової оперативної пам'яті для збереження kd-дерева, яке використовується для пошуку найближчих сусідів інтерпольованої точки.

### Висновок до розділу

У межах даного розділу здійснено розробку програмного продукту для вирішення поставленої задачі, а саме модифікація та оптимізація існуючого алгоритму зворотних зважених відстаней для побудови локальної карти рельєфу за

дискретним набором точок. В програмі використовуються реальні вхідні дані, а саме бінарні файли місії SRTM, файли типу SRTM1, для більшої точності обчислень.

Описано основні інструменти програми, які використовуються для вирішення задачі.

Під час демонстрації програми збоїв та недоліків не виявлено, що говорить про високу якість розробки та можливість впровадження у роботу за потребою.

## ПЕРЕЛІК ПОСИЛАНЬ

1. Перспективное изображение рельефа [Электронный ресурс]. Режим доступа до ресурсу: <http://geoman.ru/books/item/f00/s00/z00000060/st041.shtml>
2. Построение блок-диаграммы по топографической карте [Электронный ресурс]. Режим доступа до ресурсу: <http://geo.1september.ru/article.php?ID=200104005>
3. Салищен К.А. «Картоведение» - Москва: издательство московского университета, 1990 – с.400.
4. Зображення рельєфу і місцевих предметів на топографічних картах[Електронний ресурс]. Режим доступа до ресурсу: [http://bookwu.net/book\\_vijskova-topografiya\\_1067/11\\_1.3-zobrazhennya-relyefu-i-miscevih-predmetiv-na-topografichnih-kartah](http://bookwu.net/book_vijskova-topografiya_1067/11_1.3-zobrazhennya-relyefu-i-miscevih-predmetiv-na-topografichnih-kartah)
5. Визначення ізолінії[Електронний ресурс]. Режим доступа до ресурсу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Ізолінія/>.
6. Горизонталь(ізогіпса)[Електронний ресурс]. Режим доступа до ресурсу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Горизонталь/>.
7. Мала гірнича енциклопедія : у 3 т. / за ред. В. С. Білецького. — Д. : Східний видавничий дім, 2004—2013.
8. Бергштрих[Електронний ресурс]. Режим доступа до ресурсу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Бергштрих/>.
9. Метод Монте-Карло и его точность [Электронный ресурс] / Режим доступа: <https://habrahabr.ru/post/274975/>
10. А.А.Самарский. Введение в численные методы[Текст] М.: Наука, 1982 /– 141 с.
11. Екстраполяція [Електронний ресурс] / Режим доступа: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Екстраполяція>
12. Интерполяція [Електронний ресурс] / Режим доступа: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Інтерполяція>
13. Интерполяція сплайнами [Електронний ресурс] / Режим доступа: <http://statistica.ru/branches-maths/interpolyatsiya-splaynami-teor-osnovy/>
14. Интерполяция кубическими сплайнами [Электронный ресурс] / Режим доступа: [http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Интерполяция\\_кубическими\\_сплайнами](http://www.machinelearning.ru/wiki/index.php?title=Интерполяция_кубическими_сплайнами)
15. В.П.Боровиков. STATISTICA. Искусство анализа данных на компьютере: для профессионалов (2-е издание) [Текст], СПб.: Питер, 2003. – 688 с.: ил.

16. Одномерная табличная интерполяция [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://old.exponenta.ru/soft/matlab/potemkin/book2/chapter8/interp1.asp>.
17. Дж. Форсайт, М.Мальком, К. Моулер. Машинные методы математических вычислений. [Текст] Изд-во "Мир". Москва. 1980.
18. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. [Текст] – М.: Наука, 1970. – 664 с.
19. Кубический сплайн [Электронный ресурс] / Режим доступа: [https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубический\\_сплайн](https://ru.wikipedia.org/wiki/Кубический_сплайн).
20. Одномерная табличная интерполяция [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://old.exponenta.ru/soft/matlab/potemkin/book2/chapter8/interp1.asp>.
21. Виленкин Н.Я. Комбинаторика [Текст] / Виленкин Н.Я. // Москва: Наука, 1969 р. – 328 с.
22. Литвин О.М., Першина Ю.И. Reconstruction of 3-D objects with use interpolation of function [Текст] / Conf. on Automation, Control, and Information Technology // Оброблення сигналів і зображень та розпізнавання образів, Новосибірськ. – 2005 р. – 274-276 с.
23. Интерполяция в MatLab [Электронный ресурс] / Режим доступа: <http://codetown.ru/matlab/interpolyaciya/>.
24. Литвин О.М. Інтерлінація функцій і деякі її застосування. – Харків: Основа, 2002. – 544 с.
25. Литвин О.М. Методи обчислень. Додаткові розділи. – К.: Наук.думка, 2005 – 333с.
26. Литвин О.М. Інтерлінація та інтерфлетація функцій і структурний метод В.Л.Рвачова // Математичні методи і фізико-механічні поля – 2007. – 50, №4 – С. 25-35.
27. Крігінг [Електронний ресурс] / Режим доступу: <https://uk.wikipedia.org/wiki/Крігінг>
28. Литвин А.В., Просторова інтерполяція на основі підходу локального сусідства / Матеріали міжнародної наукової конференції «Актуальні наукові дослідження в сучасному світі», 26-27 квітня 2018 р. – С. 56-61.
29. Литвин А.В., Задача одночасної локалізації та картографування / Матеріали міжнародної наукової конференції «Актуальні наукові дослідження в сучасному світі», 26-27 квітня 2018 р. – С. 62-67.

**ДОДАТОК А ГРАФІЧНИЙ МАТЕРІАЛ**

**ПЛАКАТ 1 ДІАГРАМА КЛАСІВ**

**ПЛАКАТ 2 ДІАГРАМА КОМПОНЕНТІВ**



**ПЛАКАТ 3 ДІАГРАМА ПОСЛІДОВНОСТІ**

**ПЛАКАТ 4 БЛОК-СХЕМА РОБОТИ АЛГОРИТМУ**

**ПЛАКАТ 6 ГРАФІКИ РЕЗУЛЬТАТІВ ДОСЛІДЖЕНЬ**

**ПЛАКАТ 7 ЕКРАННІ ФОРМИ**